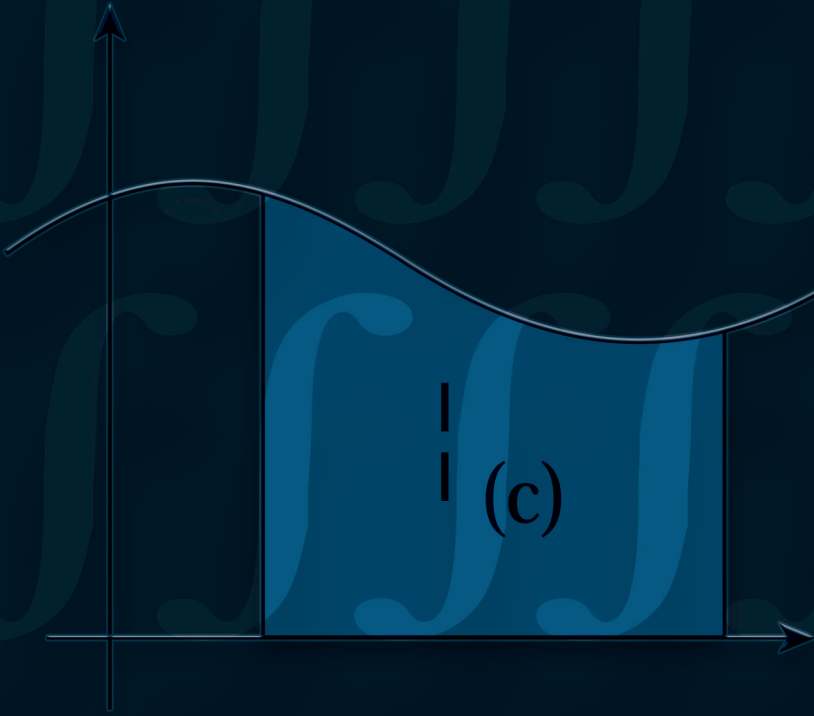


SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ



Hüseyin OĞUZ

Genel Yayın Yönetmeni / Editor in Chief • C. Cansın Selin Temana

Kapak & İç Tasarım / Cover & Interior Design • Serüven Yayınevi

Birinci Basım / First Edition • © Aralık 2022

ISBN • 978-625-6399-32-7

© copyright

Bu kitabın yayın hakkı Serüven Yayınevi'ne aittir.

Kaynak gösterilmeden alıntı yapılamaz, izin almadan hiçbir yolla çoğaltılamaz.

The right to publish this book belongs to Serüven Publishing.

Citation can not be shown without the source, reproduced in any way without permission.

Serüven Yayınevi / Serüven Publishing

Türkiye Adres / Turkey Address: Yalı Mahallesi İstikbal Caddesi No:6

Güzelbahçe / İZMİR

Telefon / Phone: 05437675765

web: www.seruvenyayinevi.com

e-mail: seruvenyayinevi@gmail.com

Baskı & Cilt / Printing & Volume

Sertifika / Certificate No: 47083

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ*

Dr. Hüseyin Oğuz

* Singüler integral denklemler için bir nümerik çözüm yöntemi / A numerical solution method for singular integral equations

Danışman: DOÇ. DR. ELÇİN YUSUFOĞLU

Bu çalışmada singüler integral denklemler ile ilgili genel bilgiler verilmiş olup, bu tür denklemlerin indis kavramına bağlı özel durumları ile bu özel durumlara karşılık gelen hesaplama biçimleri ele alınmış ve singüler denklemlerin hangi şartlar altında çözülebileceği incelenmiştir. Akabinde Carleman-Vekua yöntemi yardımıyla singüler integral denklemlerin reglerleştirilmesi verilmiştir. Özel seçilmiş sıralama noktaları kullanılarak lineer denklemler sistemi elde edildikten sonra interpolasyon polinomu türetilerek, bu polinomun çözüme yakınsaklık durumu incelenmiştir. İki farklı sayısal örnek üzerinden sayısal karşılaştırılmalar yapılmış ve sonuçlar tablolarla sunulmuştur.

Bu çalışmamın hazırlanmasında emeği geçen çok değerli danışmanım Prof. Dr. Elçin YUSUFOğLU hocama ve desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Hüseyin Oğuz

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ.....	IX
TABLOLAR DİZİNİ.....	X
GİRİŞ	1
1. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER	6
1.1. Cauchy Tip Singüler İntegral Denklemler	6
1.2. Hölder Koşulu	7
1.3. Doğru Parçası Üzerinde Singüler İntegralin Esas Değeri.....	8
1.4. Singüler Eğrisel İntegralin Esas Değeri ve Sokhotskiy-Plemelj Formülü	9
1.5. Argüment Prensibi.....	13
1.6. İndis Kavramı	14
2. JACOBI POLİNOMLARI.....	17
2.1. Genel Bilgiler	17
2.2. Jacobi Polinomlarının Türetiliş Şekilleri.....	19
2.3. Jacobi Polinomlarının Ortogonalliği	20
2.4. Jacobi Polinomlarının Sağladığı Diferensiyel Denklemler	20
2.5. N Nokta Gauss Jacobi Kuadratür Formülü	21
3. ÖZEL KUADRATÜR FORMÜLÜNÜN TÜRETİLMESİ.....	22
3.1. Sabit Katsayılı Singüler İntegral Bir İfade İçin Kuadratür Formülü	22
3.2. $Q_{n,j}^{(\alpha,\beta)}(x)$ Polinomları	25
3.3. W_i^n Ağırlıkları.....	26
4. KARAKTERİSTİK DENKLEM VE ÇÖZÜMÜ	29
4.1. Karakteristik Denklem	29
4.2. Karakteristik Denklemin Çözümü.....	31
5. CARLEMAN-VEKUA REGÜLERLEŞTİRME YÖNTEMİ	35

6. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ	37
7. NYSTRÖM İNTERPOLASYON FORMÜLÜ	42
8. SAYISAL ÖRNEKLER	55
9. SONUÇ	60

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
L	: Kompleks düzlemde bir eğri
Ω^+	: L eğrisinin sınırladığı iç bölge
Ω^-	: $\Omega^+ \cup L$ bölgesinin tümleyeni olan dış bölge
$\varphi(\tau)$	: L eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon
λ	: Hölder üssü
A	: Hölder Sabiti
Ind	: İndis
$\arg$	: Argüment
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	: Jacobi Polinomu
$\delta_{i,j}$	: Kronecker Deltası
$\omega(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
$E_{2n}(f)$	: Kalan terim ifadesi
$\tilde{f}(x)$	: $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisine göre toplamı
$\rho_n(f; x)$	: Kalan terim ifadesi

Not: Bu listede belirtilmeyen semboller kullanıldıkları yerlerde belirtilmiştir.

TABLÖLAR DİZİNİ

1	Örnek 1 de verilen Singüler integral denklemin $n = 5$ için nümerik çözüm değerleri.....	46
2	Örnek 1 de verilen Singüler integral denklemin $n = 7$ için nümerik çözüm değerleri	47
3	Örnek 1 de verilen Singüler integral denklemin $n = 9$ için nümerik çözüm değerleri.....	47
4	$n = 5, 7, 9$ değerleri için ek koşul integralinin yaklaşık değeri.....	48
5	Örnek 2 de verilen Singüler integral denklemin $n = 5$ için nümerik çözüm değerleri.....	48
6	Örnek 2 de verilen Singüler integral denklemin $n = 7$ için nümerik çözüm değerleri.....	49
7	Örnek 2 de verilen Singüler integral denklemin $n = 9$ için nümerik çözüm değerleri.....	49

GİRİŞ

Matematiksel fizik, elastisite teorisi ve akışkanlar dinamiği gibi pek çok problem sürekli veya sürekli olmayan çekirdekli Fredholm integral denklemine dönüştürülebilmektedir. Dolayısıyla İntegral denklemlerin çözülebilirliğinin incelenmesi önemli bir matematik problemi olmaya devam etmektedir.

Fredholm integral denklemler teorisinin verilmesinden hemen sonra singüler integral denklemler teorisi Poincare ve Hilbert tarafından başlatılmıştır fakat uzun bir süre matematikçiler tarafından bu teoriye yeteri kadar ilgi gösterilmemiştir. 1950' li yıllardan itibaren bu teoriye ilgi yoğunlaşmaya başlamıştır. Özellikle Riemann ve Hilbert şeklindeki sınır değer problemlerinin incelenmesinde bu teorisinin dikkate alınmasıyla singüler integral denklemler teorisinin önemi daha iyi anlaşılmıştır. Bu nedenle Muskhelishvili [1] singüler integral denklemler teorisini yukarıda belirtilen sınır değer problemleriyle ilişkilendirmiştir. Burada esas araştırma ve çözüm aracı olarak Cauchy esas değer anlamında integral kullanılmıştır. Muskhelishvili bu çalışmasında sadece bir boyutlu integral denklemleri incelemiştir.

Yine bu dönemlerde integral denklemlerin analitik çözümünü elde etmek için pek çok yeni metotlar Tricomi'in [2], Popov'un [3], Green'in [4] monografilerinde yer almıştır. Bu integral denklemleri analitik olarak çözmek genelde zor olduğu için nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi önemli olmuştur. Nümerik çözüm yöntemleri ile ilgili detaylı bilgilere [5] ve [6] kaynaklardan ulaşabilmek mümkündür.

Sheo Kumar ve A.L. Sangal [7] bir boyutlu Cauchy tip singüler integral denklemin nümerik çözümünün bulunması için kübik spline metodunu uygulamıştır.

M.A. Abdou [8] çalışmasında Cauchy tip 2. çeşit singüler integral denklem ele alınmış, önce singülerlik giderilmiş daha sonra da çözüm Legendre polinomlarına bağlı bir Fourier serisi şeklinde araştırmıştır. Sonuçta uygun Fourier katsayıları cinsinden sonsuz sayıda lineer denklemler sistemi elde edilerek, ilk k adedi seçilmek suretiyle nümerik çözülmüştür.

Steen Krenk [9], 1. ve 2. çeşit singüler integral denklemler için Gauss Jacobi kuadratür formülleri uygularken indisin -1, 0, 1 değerlerine karşılık gelen lineer denklemler sistemini türetmiştir.

G.E. Okecha [10] Cauchy tip 1. çeşit singüler integralleri Gauss Jacobi kuadratür formülünü kullanarak çözmüştür.

Apostolos Gerasoulis, [11] singüler integral denklemleri çözmek için önce singüleriteyi gidererek Gauss Jacobi kuadratür formülü ve kolokasyon yöntemi yardımıyla bir nümerik yöntemi incelemiş ve bir lineer denklem sistemi türetmiştir. Daha sonra sıralama noktaları ve bu noktalarda bilinmeyen bulunan değerleri interpolate edilerek bir interpolasyon polinomu türetilmiştir. Gerasoulis bu makalede aynı zamanda Carleman-Vekua regulerleştirme yöntemini kullanarak Fredholm integral denklem elde etmiş ve buna da karşılık yine bir lineer sistemi türetmiştir. Sıralama noktaları ve bu noktalardaki bilinmeyen değerleri yardımıyla diğer bir interpolasyon polinomu türetmiştir. Sonunca polinom Nyström polinomu olarak bilinmektedir. Makalenin ilerleyen kısımlarında Nyström yönteminin yakınsaklığı ve yukarıda bahsi geçen polinomların denkliği gösterilmiştir.

A. Chrysakis ve arkadaşları [12] logaritmik çekirdekli integral denklemi keyfi sıralama noktalarını ve Chebyshev polinomlarını kullanarak nümerik olarak çözmüş ve iki sayısal örnek incelemiştir.

Bu çeşit singüler integral denklemler, C. Samphoton [13] tarafından da incelenmiştir. Bu çalışmadaki iki boyutlu Dirichlet sınır değer problemi logaritmik çekirdekli 1. çeşit Fredholm tür integral denklem şeklinde ifade edilmiştir.

Xiaoqing Jin [14], 2.çeşit singüler integral denklemin bir pratik çözümünü vermek için Gauss Jakobi kuadratür formülünü, Jacobi polinomlarının sıfırlarını ve bu sıfırlardan farklı sıralama noktalarını kullanmıştır.

Daha sonra sıralama noktalar takımı ile kuadratür noktaları takımı arasında bir Lagrange interpolasyon polinomu kullanmış, sonuçta da bir lineer denklem sistemi türetmiş ve makalede iki örnek incelemiştir.

V.M. Alexandrov [15] konvolüsyon tür integral denklemlerin bir özel şekline dönüştürülebilir 2 ve 3 boyutlu kontakt problemini ele alarak integral denklemin çekirdeğini serilere ayırmak suretiyle bir asimptotik

çözüm yöntemi geliştirmiştir. Bu çalışmada bir bilinmeyenli integral denklem ve iki bilinmeyenli iki integral denklemden oluşan sistem ayrıca incelenmiştir. Sonuncu durumda kaynak fonksiyonların üstel bir hızla sıfıra yakınsadığı varsayılmıştır.

V.M Alexandrov [16] çoğu lineer kontakt problemlerin incelenmesinde ortaya çıkan 1.çeşit Fredholm tür integral denklemin bir çözümünü vermiştir. Bu denklemin çekirdeğinin bağlı olduğu terimin asimptotik analizi sonucu söz konusu integral denklem logaritmik çekirdekli şekle dönüştürerek denklemin çözümünün yapısını incelemiştir. Özel durumda da kesin çözümü, genel durumda ise yaklaşık çözümü vermiştir. Sonuncu durumda en iyi yaklaşım yöntemi sayılan Multopp-Kalandiya metodu kullanılmıştır. Bu metot gereği çözümü, interpolasyon düğüm noktalar, 1.çeşit Chebyshev polinomunun sıfırlar olan Lagrange interpolasyon polinom şeklinde inşa edilmektedir. Üst ve alt sınırları boyu iki pançla sıkıştırılan elastik şerit için kontakt problemin sayısal çözümü örnek olarak açıklanmıştır.

Chebakov [17] elastik şerit için sürtünmeli kontakt probleminin önce bir reel eksen üzerindeki sınır koşullarını vermiş daha sonra da normal ve teğetsel gerilmelerin Airy fonksiyonu ile ifadesini ve bu fonksiyonun da Fourier integral dönüşümünü kullanmıştır. Sonuçta Airy fonksiyonu cinsinden biharmonik denklem onun dönüşümü cinsinden adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek genel çözüm bulunmuştur. Genel çözümdeki keyfi sabitler sınır koşulları yardımıyla belirlenirken kontakt basıncı cinsinden Cauchy tip 2.çeşit singüler integral denklem elde edilmiştir. Sonuncu denklemin polinom cinsinden çözümü bulunmuş ve sonuçlar tablolar ve grafiklerle gösterilmiştir.

Antonio Scalia ve Mezhlum A. Sumbatyan [18] gözenekli elastik şerit için kontakt probleminde ortaya çıkan integralin özellikleri üzerine araştırma yapmıştır. Bu nedenle söz konusu integral denklemin çekirdeğinin genel özellikleri ve büyük bağıl kalınlıkların sonsuza gitmesi durumunda çekirdeğin asimptotik davranışı için bir gösterim elde etmiştir. Sonrasında ise ince kalınlıklı şerit durumunda çözümün Wiener-Hopf denkleminin çözüm olarak bulunabileceğini göstermiştir.

Rizk A.A. [19] çatlaklara sahip ortotrop yarı sonsuz ortamların termal şokun etkisini incelerken düzlem elastisitenin yerleşme bileşenlerine bağlı iki adet denge denklemini, sınırdaki gerilme durumuna

karşılık gelen sınır koşulları ile ele almıştır. Bilinmeyen yer değiştirme bileşenlerinin Fourier integral dönüşümü kullanmak suretiyle Cauchy çekirdekli 1.çeşit singüler integral denklem türetmiştir. Araştırmanın bir sonraki aşamasında Muskhelishvili tarafından önerilen çözüm tekniği kullanılarak çatlaklar durumunda önemlilik arz eden yoğunluk katsayısı için ifadeler elde edilmiştir. Seçilmiş örnek için tablo ve grafiklerle verilerek bu sonuçlar yorumlanmıştır.

V.M. Alexandrov ve V.Yu. Salamatova [20] şerit biçimli levha ile elastik yarım uzayın etkileşimini inceleyerek 1.çeşit integral denklem elde etmiş, daha sonra bu denklem logaritmik çekirdekli integral denklem şekline dönüştürülmüştür. Sayısal çözüm için Multopp-Kalandiya yöntemi uygulanmıştır.

Erhan Coşkun [21], integro diferansiyel denklem için sınır değer problemine örnek olarak izotrop saçılmayı ele almış, K.M. Case tarafından geliştirilen yöntemle dayanarak yeni kuadratur formülü türetmek suretiyle bu problemi nümerik olarak çözmüştür. Erhan Coşkun tarafından geliştirilen kuadratur formülündeki ağırlıklar 6. Dereceden çift bir polinom yardımıyla ifade edilir iken daha sonra polinomun katsayıları bulunmuş ve integrasyon noktalarının seçilme şekli belirlenmiştir. Bir uygulama olarak 4-nokta kuadratur formülü yardımıyla nümerik çözümler bulunmuştur.

Bu çalışma yukarıda bahsedilenler doğrultusunda aşağıdaki şekilde organize edilmiştir:

Bölüm 1’de Cauchy tip singüler denklemler ele alınmış, Cauchy esas değer, indis ve argüment prensibi kavramları açıklanmıştır.

Bölüm 2’de, özet olarak Jacobi polinomları ve n nokta Gauss Jacobi kuadratur formülü hakkında bilgiler verilmiştir.

Bölüm 3’te sabit katsayılı singüler integral denklemler için ileriki bölümde kullanılacak olan özel kuadratur formülünün türetilişi ele alınmıştır.

Bölüm 4’te Singüler integral denklemler teorisinin konumuzla ilgili gerekli olan bilgilerden karakteristik integral denklem kavramı ve karakteristik denklemin çözümü verilmiştir.

Bölüm 5'te Carleman Vekua regulerleştirme yöntemi ile singüler integral denklemin Fredholm tip integral denkleme dönüşümü gösterilmiştir

Bölüm 6 da Singüler integral denklemin çeşitli şartlar için çözüm durumları ele alınmış ve Gauss Jacobi kuadratür formülü yardımıyla lineer denklem sistemi türetilmiştir.

Bölüm 7 de Carleman Vekua regulerleştirme yöntemi ile elde edilen Fredholm integral denklemine Nyström yöntemi uygulanmış ve Gauss Jacobi kuadratür formülü yardımıyla ikinci bir lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Daha sonra, yukarıda bahsedilen doğal interpolasyon polinomlarının kendi aralarında mutlak değerce yakınlığı, bir taraftan seçilen integrasyon noktaları, diğer taraftan ise $[-1,1]$ aralığının bu interpolasyon noktaları dışındaki noktalar için gösterilmiştir.

1. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER

Bu bölümde, Cauchy tip singüler integral denklemler, bu denklemlerle ilgili gerekli kavramlardan Cauchy esas değer, Hölder koşulu ve indis kavramının yanı sıra argüment prensibi kavramı tanıtılacaktır.

1.1. Cauchy Tip Singüler İntegral Denklemler

L eğrisi düzgün bir eğri olsun, yani L eğrisi kendi kendini kesmeyen sürekli değişen teğetlere sahip bir eğri olup herhangi bir sivrilme noktasına da sahip değildir.

L Kapalı düzgün bir eğri olsun;

Ω^+ , L nin sınırladığı iç bölge; $\Omega^+ \cup L$ kesişiminin tümleyeni olan ve sonsuz uzak noktayı da içine alan bölge de dış bölge adını alıp Ω^- gösterilmiş olsun.

Eğer $f(z)$, Ω^+ bölgesinde analitik ve $\Omega^+ \cup L$ de sürekli ise, Cauchy formülü gereği aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \text{ ise} \\ 0, & z \in \Omega^- \text{ ise} \end{cases} \quad (1.1)$$

Eğer $f(z)$, Ω^- bölgesinde analitik ve $\Omega^- \cup L$ de sürekli ise, Cauchy formülü gereği aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in \Omega^+ \text{ ise} \\ f(\infty) - f(z), & z \in \Omega^- \text{ ise} \end{cases} \quad (1.2)$$

L eğrisi şimdi de düzgün kapalı veya açık olabilir, tamamı düzlemin bir sonlu bölgesinin içinde yer alan bir eğri olsun. $\varphi(\tau)$ fonksiyonu da L eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki Cauchy formülü doğrudur.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (1.3)$$

(1.3) İntegrali bir Cauchy tür integraldır denir. (1.3) integrali için integral altı fonksiyonunun analitik olmadığı noktalar sadece L eğrisinin noktalarıdır. Bu eğriye $\Phi(z)$ fonksiyonunun singüler eğrisi denir.

Eğer L açık bir eğri ise, $\Phi(z)$ fonksiyonu L singüler eğrisi hariç tüm düzlemde analitik olacaktır.

Eğer L bir kapalı eğri ise, bu durumda $\Phi(z)$ fonksiyonu Ω^+ ve Ω^- de tanımlı olan sırasıyla $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ gibi iki fonksiyona ayrılacaktır. Bu fonksiyonlar genelde birbirinin analitik devamı değildirler.

Birbirini düzleme tamamlayan Ω^+, Ω^- bölgelerinde tanımlı iki farklı analitik ($\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ gibi) ifadeye sahip $\Phi(z)$ fonksiyonu bir parçalı analitik fonksiyon olacaktır.

$\Phi(z)$ fonksiyonu sonsuz uzak noktada sıfırdır. Yani $\Phi(\infty) = 0$ dır. Bu koşul aynı zamanda parçalı analitik fonksiyonun Cauchy integrali ile gösterilmesi için bir yeterlilik koşuludur.

1.2. Hölder Koşulu

L kompleks düzlemde düzgün bir eğri ve $\varphi(t)$ bu eğri üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\lambda \quad (1.4)$$

eşitsizliği her $t_1, t_2 \in L$ için sağlanıyorsa o halde $\varphi(t)$ fonksiyonu Hölder koşulunu sağlıyordur denir. Burada A ve λ pozitif sabitlerdir. A 'ya Hölder sabiti, λ 'ya ise Hölder üssü denir.

Eğer $\lambda > 1$ olsaydı $\varphi'(t)$ her yerde sıfır, dolayısıyla $\varphi(t)$ fonksiyonu sabit olurdu. λ 'yı $0 < \lambda \leq 1$ şeklinde kabul edeceğiz. $\lambda = 1$ olduğunda Hölder koşulu literatürde bilinen Lipschitz koşulunun aynısı olmaktadır.

t_1 ve t_2 birbirine yeteri kadar yakın herhangi iki nokta ve Hölder koşulu λ_1 üssüne göre sağlanmış olsun. O halde Hölder koşulu $\lambda < \lambda_1$ olmak üzere λ üssüne göre de sağlanacaktır. Yani daha küçük λ 'lar için

Hölder sürekli fonksiyonlar sınıfı daha geniş olmaktadır. Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $\lambda=1$ üslü Hölder fonksiyonlar sınıfı olduğundan bu sınıf en dar Hölder sürekli fonksiyonlar sınıfı olmaktadır.

1.3. Doğru Parçası Üzerinde Singüler İntegralin Esas Değeri

$$\int_a^b \frac{1}{x-c} dx, \quad a < c < b \quad (1.5)$$

integrali verilmiş olsun.

Genelleştirilmiş integralin tanımı gereği

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(- \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (1.6)$$

yazabiliriz. Son ifadedeki limit değeri ε_1 ve ε_2 'nin sıfıra yaklaşma şekline bağlıdır. Bu yüzden genelleştirilmiş integral mevcut değildir. Fakat

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad (1.7)$$

seçersek, bu durumda verilmiş integral için Cauchy esas değeri söz konusu olacaktır ve

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b \quad (1.8)$$

singüler integrali için Cauchy esas değeri

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (1.9)$$

şeklinde belirlenmiş olacaktır.

$\varphi(x) \in [a, b]$ aralığında Hölder koşulunu sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx \quad (1.10)$$

integralini ele alalım. Bu integrali

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (1.11)$$

şeklinde düzenleyelim.

(1.11) in sağ taraftaki ilk integral bir genelleştirilmiş integral gibi yakınsar çünkü Hölder koşulundan

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} \right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (1.12)$$

dir. (1.11) in sağ taraftaki ikinci integralin Cauchy esas değeri ise (1.9) denklemi ile belirtilmiştir. Bu yüzden $\varphi(x)$ Hölder koşulunu sağlayan bir fonksiyon olduğunda (1.10) ile verilen integralin Cauchy esas değeri mevcut olup

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (1.13)$$

şeklinde belirlenecektir.

1.4. Singüler Eğrisel İntegralin Esas Değeri ve Sokhotskiy-Plemelj

Formülü

L düzgün bir eğri olmak üzere;

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} dt, \quad t \in L \quad (1.14)$$

verilmiş ve t merkezli ρ yarıçaplı çember ile L eğrisi ile yalnızca iki noktada (t_1 ve t_2) kesişmiş olsun. ρ yi yeteri kadar küçük seçerek bu durumu gerçekleştirmek mümkündür. $\ell = t_1 \overset{\cup}{t_2}$ olmak üzere,

$$\int_{L-t} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} dt \quad (1.15)$$

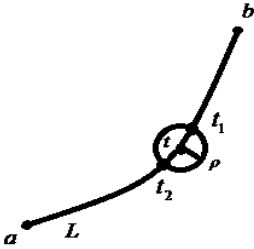
integralini ele alalım.

Tanım 1.1: $\rho \rightarrow 0$ iken (1.15) denkleminin limit değerine (1.11) singüler eğrisel integralinin esas değeridir denir.

Aşağıdaki düzenlemeyi yapalım.

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} dt = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} dt + \varphi(t) \int_L \frac{dt}{\tau-t} \quad (1.16)$$

Yani (1.14) integrali, $\varphi(\tau)$ Hölder koşulunu sağladığı kabulü ile Cauchy anlamında mevcuttur.



Şekil 1.1 L eğrisinin düzgün olduğu t noktası durumu

Şekilden de görüldüğü gibi L eğrisinin düzgün olduğu her t noktası için;

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} dt = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} dt + \varphi(t) \left(\ln \frac{b-t}{a-t} + i\pi \right) \quad (1.17)$$

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} dt = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} dt + \varphi(t) \ln \frac{b-t}{a-t} \quad (1.18)$$

eşitlikleri doğrudur.

Burada a ve b, L eğrisinin uç noktalarıdır. Kapalı eğri ($a=b$) durumunda

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + i\pi \varphi(t) \quad (1.19)$$

elde edilecektir.

L kapalı veya açık düzgün bir eğri ve $\varphi(\tau)$, L üzerinde Hölder koşuluna sahip olsun, o halde;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z} d\tau \quad (1.20)$$

şeklinde Cauchy tip integral için $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ fonksiyonları uç noktaları hariç her $t \in L$ için limit değerine sahip olacaklardır.

L nin solundan veya sağından L ye yaklaşılmasına bağlı olarak ‘+’ veya ‘-’ kullanıldı.

Bu durumda Sokhotskiy-Plemelj formülü gereği; [23]

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad \Phi^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (1.21)$$

yazılabilir. Buradan;

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \quad (1.22)$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (1.23)$$

Ayrıca reel eksen durumunda,

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-x} d\tau \quad (1.24)$$

$$\Phi^-(x) = -\frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-x} d\tau \quad (1.25)$$

ve

$$\Phi^+(\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\infty) \quad (1.26)$$

$$\Phi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty) \quad (1.27)$$

olmaktadır. Buradan;

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 0 \quad (1.28)$$

ve (1.23) gereği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau = 0 \quad (1.29)$$

sağlanacaktır.

Reel eksen de bir Cauchy tip integralle temsil edilen fonksiyon (1.28) koşulunu sağlamalıdır. Bu koşul kompleks düzlemin reel eksene göre üst ve alt düzlemlerinde parçalı analitik olan fonksiyonun reel eksen de Cauchy tip integralle temsil edilebilmesi için yeterlilik koşuludur.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \notin \mathbb{R} \quad (1.30)$$

ele alalım, burada $\varphi(z)$ reel eksen de Hölder koşulunu sağlayan bir fonksiyon olarak düşünülmektedir.

Eğer $\varphi(z)$ üst yarı düzlemde analitik bir fonksiyon ise kapalı üst yarı düzlemde de süreklidir ve reel eksen üzerinde Hölder koşulunu sağlıyordur. Öyleyse;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-z} dx = \begin{cases} \varphi(z) - \frac{1}{2} \varphi(\infty), & \text{eğer } \operatorname{Im} z > 0 \text{ ise} \\ -\frac{1}{2} \varphi(\infty), & \text{eğer } \operatorname{Im} z < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.31)$$

Eğer $\varphi(z)$ alt yarı düzlemde analitik bir fonksiyon ise kapalı alt yarı düzlemde de süreklidir ve reel eksen üzerinde Hölder koşulunu sağlıyordur. Öyleyse;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(z) - \varphi(\infty)}{x-z} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi(\infty), & \text{eğer } \operatorname{Im} z > 0 \text{ ise} \\ -\varphi(z) + \frac{1}{2} \varphi(\infty), & \text{eğer } \operatorname{Im} z < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.32)$$

1.5. Argüment Prensibi

Teorem 1.1: $f(z)$, $L = L_0 + L_1 \cdots + L_m$ ile sınırlı çok bağlantılı Ω bölgesinde sonlu noktalar hariç her yerde analitik ve tek değerli; $\Omega \cup L$ birleşiminde sürekli bir fonksiyon olsun. $f(z)$ nin Ω bölgesinde analitik olmadığı noktalar yalnızca kutup noktaları olsun; L üzerinde ise en fazla sonlu sayıda tam katlı sıfırları olsun. O halde aşağıdaki formül doğrudur. [22,23]

$$N_{\Omega} - P_{\Omega} + \frac{1}{2}(N_L - P_L) = \frac{1}{2\pi} [\arg f(z)]_L \quad (1.33)$$

Bu ifadede aşağıdaki notasyonlar kullanıldı;

N_{Ω} : Ω daki sıfırların sayısı

P_{Ω} : Ω daki kutupların sayısı

N_L : L deki sıfırların sayısı

P_L : L deki kutupların sayısı

1.6. İndis Kavramı

L düzgün kapalı bir eğri, $D(t)$, L de verilmiş sıfırdan farklı sürekli bir fonksiyon olsun.

Tanım 1.2: L nin pozitif yönü boyu $\arg D(t)$ artışının 2π ye oranına $D(t)$ fonksiyonunun L eğrisi boyu indisi denir.

İndisi κ ile göstereceğiz. Yani

$$\kappa = \text{Ind } D(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg D(t)]_L \quad (1.34)$$

$\ln D(t) = \ln |D(t)| + i \arg D(t)$ olduğundan dolayı

$$[\ln D(t)]_L = i [\arg D(t)]_L \quad (1.35)$$

ve dolayısıyla

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln D(t)]_L \quad (1.36)$$

yazılabilir.

κ indisi integral yardımıyla da gösterilebilir.

$$\kappa = \text{Ind } D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \text{Ind } D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg D(t) \quad (1.37)$$

Aşağıdaki önermeler doğrudur.[1]

- 1) Kapalı eğri üzerinde sürekli, hiçbir noktasında da sıfır olmayan fonksiyonun indisi bir tamsayıdır.
- 2) İki fonksiyonun çarpımının indisi çarpanların indisleri toplamına eşittir. Bölüm durumunda ise toplam yerine fark geçerli olacaktır

Şimdi de $D(t)$, L de diferansiyellenebilir olup L nin içerisinde veya dışında analitik bir fonksiyonun L üzerindeki sınır değerleri olsun. O halde $D(t)$ nin indisi

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \operatorname{Ind} D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{D'(t)}{D(t)} dt \quad (1.38)$$

şeklinde, onun logaritmik rezidüsüne eşittir.

Argüment prensibi gereği indis kavramı için aşağıdaki özellikler sonuç olarak elde edilebilir. [1]

- 3) Eğer $D(t), L$ bölgesinin içerisinde veya dışında analitik olan fonksiyonun L üzerindeki sınır değerleri ise; $D(t)$ nin indisi, L bölgesinin içerisindeki sıfırlarının sayısına veya dışındaki sıfırlarının sayısının negatifine eşittir.
- 4) Eğer $D(z), L$ bölgesinin içerisinde sonlu sayıda noktalar hariç her yerde analitik, bahsedilen sonlu sayıdaki noktalar da birer kutup noktaları ise, $D(t)$ nin indisi L nin içerisindeki sıfırlarının sayısı ile kutuplarının sayısının farkına eşittir. Bu sayılar belirlenirken uygun katlılık derecesi de dikkate alınacaktır.

Not:

$\bar{D}(t)$ nin indisi $\bar{\kappa}$, $D(t)$ nin indisi de κ ise $\bar{\kappa} = -\kappa$ eşitliği sağlanır. L bölgesi $t = t_1(s) + it_2(s)$, $0 \leq s \leq \ell$ ile verilmiş olsun.

$$D(t) = D(t_1(s) + it_2(s)) = \xi(s) + i\eta(s) \quad (1.39)$$

ξ ve η leri bir kartezyen koordinatları olarak düşünecek olursak

$\xi = \xi(s)$ ve $\eta = \eta(s)$, $0 \leq s \leq \ell$ parametrik denklemleri bu kartezyen koordinat sisteminde bir Γ eğrisini belirler. $D(t)$ sürekli ve L de kapalı olduğu için Γ eğrisi de kapalı olacaktır.

s , 0 dan ℓ ye kadar değiştiğinde uygun yarıçap vektörünün tam dönmelerinin sayısının

$D(t)$ nin indisi olacağı açıktır. $D(t)$ reel veya sanal bir fonksiyon olup sıfıra da sahip değil ise Γ eğrisi bir doğru parçasıdır ve $D(t)$ nin indisi sıfıra da eşit olacaktır.

Genelde indis (1.37) ile hesaplanmaktadır.

$$d \arg D(t) = d \arctan \frac{\eta(s)}{\xi(s)} \quad (1.40)$$

ξ ve η diferansiyellenebilir ise aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi(s)\eta'_s(s) - \eta(s)\xi'_s(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds \quad (1.41)$$

2. JACOBI POLİNOMLARI

2.1. Genel Bilgiler

$\omega(x)$ fonksiyonu sonlu veya sonsuz (a,b) üzerinde negatif olmayan Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olup,

$$\int_a^b \omega(x) dx > 0 \quad (2.1)$$

özelliğine sahip olsun.

Tanım 2.1: Eğer $P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$ polinomları,

$$i \neq j \text{ durumunda} \quad \int_a^b \omega(x) P_i(x) P_j(x) dx = 0 \quad (2.2)$$

$$i = j \text{ durumunda} \quad \int_a^b \omega(x) P_i(x) P_j(x) dx = A \quad (A \neq 0) \quad (2.3)$$

koşullarını sağlıyor ise, $\{P_i(x)\}_{i=1}^m$ polinomlar ailesi (a,b) üzerinde $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre bir ortogonal fonksiyonlar ailesidir denir.

Kronokker sembolü $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2: Eğer

$$\int_a^b \omega(x) P_i(x) P_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2.4)$$

koşulu sağlanıyor ise $\{P_i(x)\}_{i=1}^m$ polinomlar ailesi (a,b) üzerinde $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre bir ortonormal polinomlar ailesidir denir.

Bu çalışmada Jacobi polinomlarını kullanacağımız için $a = -1$, $b = 1$ kabul ederek;

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1 \quad (2.5)$$

ağırlık fonksiyonunu seçeceğiz ve Jacobi polinomlarını $P_n^{(\alpha, \beta)}$ ile göstereceğiz. Burada n Jacobi polinomunun derecesini göstermektedir

$\omega(x)$ 'in ve integral aralığının seçimine bağlı olarak farklı ortogonal polinomlar ailesinden bahsedilebilir.

Örneğin; Szego [24] bu tip polinomlar ailesine örnek olarak Jacobi polinomlar ailesinin yanı sıra aşağıdaki polinomlar ailelerini incelemiştir. [24]

Laguerre polinomlar ailesi ($a = 0, b = +\infty, \omega(x) = e^{-x} x^\alpha \alpha > -1$),

Hermite polinomlar ailesi ($a = -\infty, b = +\infty, \omega(x) = e^{-x^2}$),

Ayrıca da özel durum olarak ultra küresel polinomlar ailesinden;

1.çeşit Chebyshev polinomlar ailesi

$$(T_n(x) = \cos n\theta, x = \cos \theta, \alpha = \beta = -\frac{1}{2}),$$

2.çeşit Chebyshev polinomlar ailesi

$$(U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, x = \cos \theta, \alpha = \beta = \frac{1}{2})$$

polinomlar ailesi incelenmiştir.

Çetin [25] Jacobi, Laguerre ve Hermit polinomlarının yanı sıra Bessel ve Hipergeometrik polinomlardan Wilson, Sürekli dual Hahn ve Hahn polinomlarını inceleyerek, bu polinomların çarpımlarının lineerleştirilmesi ve toplanabilirliğin üzerine araştırma yapmıştır.

Bir sonraki kısımda Jacobi polinomlar ailesi ile ilgili bazı bilgileri kısaca özetleyeceğiz.[24]

2.2. Jacobi Polinomlarının Türetiliş Şekilleri

Aşağıda Jacobi polinomlarının birkaç türetiliş şekli verilmektedir

$$\text{a) } P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \right] \quad (2.6)$$

Bu formül, Jacobi polinomları için Rodrigues formülü olarak bilinmektedir.

$$\text{b) } P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\alpha}{n-\nu} \binom{n+\beta}{\nu} \left(\frac{x-1}{2} \right)^\nu \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-\nu} \quad (2.7)$$

$$= \binom{n+\alpha}{n} \left(\frac{x+1}{2} \right)^n \sum_{\nu=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\nu)} \binom{n+\beta}{\nu} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\nu$$

$$\text{c) } P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{1-t^2-1}{2t-x} \right) \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^\alpha \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^\beta \frac{dt}{t-x} \quad x \neq -1, +1 \quad (2.8)$$

$$\text{d) } n = 2, 3, 4 \dots \text{ olmak üzere } 2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ (2n+\alpha+\beta-1)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (2.9)$$

$$\cdot \left\{ (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2 \right\}$$

$$-2(n+\alpha-1)(n+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

eşitliği Jacobi polinomları için öz yineleme bağıntısını ifade eder.

$$\text{e) } (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2} \right)^n}{2\pi i} \int (1-t)^{n+\alpha} (1+t)^{n+\beta} (t-x)^{-n-1} dt \quad x \neq -1, +1 \quad (2.10)$$

eşitliği Jacobi polinomlarının integral şeklinde ifade edilmesini temsil eder.

$$f) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\alpha+n) \cdots (\alpha+n-k+1) (-1)^k (1-x)^{n-k} \cdot (\beta+n) \cdots (\beta+k+1) (1+x)^k \quad (2.11)$$

Jacobi polinomlarının ilk üçü türetilerek aşağıda verilmiştir.

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1 \quad (2.12)$$

$$P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (2.13)$$

$$P_2^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{8} \left[4(\alpha+1)(\alpha+2) + 4(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)(x-1) + (\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)(x-1)^2 \right] \quad (2.14)$$

2.3. Jacobi Polinomlarının Ortogonalliği

Jacobi polinomlarının ortogonallik özelliği aşağıda verilen bağıntı ile ifade edilebilir

$$\int_{-1}^1 \omega(x) P_i^{(\alpha, \beta)}(x) P_j^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \\ I_{ii}, & \text{eğer } i = j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.15)$$

Burada,

$$I_{ii} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.16)$$

2.4. Jacobi Polinomlarının Sağladığı Diferansiyel Denklemler

Jacobi polinomu aşağıda verilen 2.mertebeden homojen diferansiyel denklemi sağlamaktadır.

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (2.17)$$

2.5. N Nokta Gauss Jacobi Kuadratür Formülü

n nokta Gauss Jacobi kuadratür formülü aşağıda verilen şekilde ifade edilir.

$$\int_{-1}^1 \omega(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx = \sum_{k=1}^n W_k^{(\alpha, \beta)} f(x_k) + E_{2n}(f) \quad (2.18)$$

Burada ağırlıklar ve kalan terim sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$W_k^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1) (1-x_k) \left[P_n^{(\alpha, \beta)}(x_k) \right]^2} \quad (2.19)$$

$$E_{2n}(f) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1) [\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)]^2} \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \quad (2.20)$$

(2.20) den görüldüğü gibi eğer $f(x)$ fonksiyonu derecesi $2n$ den küçük olan herhangi bir polinom ise, o halde $E_{2n}(f) \equiv 0$ olacaktır. Bu

$$\text{durumda } \sum_{k=1}^n W_k^{(\alpha, \beta)} f(x_k) \text{ toplamı } \int_{-1}^1 \omega(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx$$

integralinin kesin değeri olacaktır.

Gauss Jacobi kuadratür formülü ile ilgili bu özellik, n nokta kuadratür formülünün türetilişinde sağlanması gereken bir özelliktir.

3. ÖZEL KUADRATÜR FORMÜLÜNÜN TÜRETİLMESİ

3.1. Sabit Katsayılı Singüler İntegral Bir İfade İçin Kuadratür

Formülü

[26] de verilen ve her $j \in N$ için sağlanan

$$a \omega(x) P_j^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \omega(t) P_j^{(\alpha, \beta)}(t) \frac{dt}{t-x} = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\pi} b P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \quad (3.1)$$

eşitliğini ilerleyen kısımda kullanacağız.

Jacobi polinomları yardımıyla

$$Q_{nj}^{(\alpha, \beta)}(x) = P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_j^{(\alpha, \beta)}(x) - P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \quad (3.2)$$

polinomunu tanımlayalım. Aşağıdaki açılımı [9] ele alalım.

$$\frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_j^{(\alpha, \beta)}(x) - P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t_i - x} \quad (3.3)$$

Burada t_i ler

$$P_j^{(\alpha, \beta)}(t_i) = 0 \quad (3.4)$$

özellikliğini sağlamaktadır.

c_i katsayıları aşağıdaki şekilde belirlenmektedir.

$$c_i = \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i) P_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)} \quad (3.5)$$

x_k ları

$$P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n - \kappa \quad (3.6)$$

olacak şekilde seçelim.

(3.5) eşitliğini (3.3) eşitliğinde yerine yazıp $x = x_k$ kabul eder ve (3.6) yı da dikkate alırsak

$$P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) = \sum_{i=1}^n \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i) P_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)(t_i - x_k)} \quad (3.7)$$

elde ederiz.

Şimdi de (3.7) eşitliğini

$$S(x) = \frac{a}{b} \phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t) dt}{t - x} \quad (3.8)$$

ifadesini hesaplamak için kullanalım.

Burada

$$\phi(x) = f(x) \omega(x) \quad (3.9)$$

şeklindedir.

$f(x)$ fonksiyonunun Jacobi polinomlarına göre Fourier serisindeki ilk $p+1$ teriminin toplamı

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^p B_i P_i^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (3.10)$$

şeklinde ele alalım.

(3.9), (3.10) ve (3.1) eşitliklerini, (3.8) eşitliğinde yerine yazarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz

$$\tilde{S}(x) = \frac{1}{b} \left[a \omega(x) \sum_{j=0}^p B_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \omega(t) \sum_{i=0}^p B_j P_j^{(\alpha, \beta)}(t) \frac{dt}{t - x} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b} \sum_{j=0}^p B_j \left[a \omega(x) P_j^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \omega(t) P_j^{(\alpha, \beta)}(t) \frac{dt}{t-x} \right] \\
&= \frac{1}{b} \sum_{j=0}^p B_j \left[-2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\pi} b P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \right]
\end{aligned}$$

veya

$$\tilde{S}(x_k) = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{j=0}^p B_j P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \quad (3.11)$$

Şimdi de (3.7) ifadesini kullanalım. $x = x_k$ için aşağıdaki düzenlemeyi gerçekleştirelim.

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(x_k) &= -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{j=0}^p B_j \sum_{i=1}^n \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i) P_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i) (t_i - x_k)} \\
&= -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{j=0}^p \sum_{i=1}^n \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)} \frac{B_j P_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{(t_i - x_k)} \\
&= -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)} \frac{\sum_{j=0}^p B_j P_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{(t_i - x_k)} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Buradan da (3.10) eşitliği yardımıyla

$$\tilde{S}(x_k) = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)} \frac{\tilde{f}(t_i)}{(t_i - x_k)} \quad (3.13)$$

elde edilecektir. Burada $p \leq n$ dir.

(3.13) eşitliğini,

$$W_i^n = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \frac{1}{P_n^{(\alpha,\beta)}(t_i)} \frac{Q_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}. \quad (3.14)$$

kabul etmek şartıyla aşağıdaki gibi ifade edebiliriz

$$S(x_k) \square \sum_{i=1}^n W_i^n \frac{\tilde{f}(t_i)}{(t_i - x_k)} \quad (3.15)$$

3.2. $Q_{n,j}^{(\alpha,\beta)}(x)$ Polinomları

(3.2) eşitliğini yeniden ele alalım.

$$Q_{n,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(x) P_j^{(\alpha,\beta)}(x) - P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_{j-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(x)$$

Bu eşitlik $n = j$ durumunda

$$Q_{j,j}^{(\alpha,\beta)}(t_i) = 0 \quad (3.16)$$

şekline dönüşmektedir.

$Q_{n,j}^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomunun aşağıdaki özellikleri, Jacobi polinomlarının özellikleri yardımıyla belirlenmiştir.

$$a_{1n}^{(\alpha,\beta)} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left[a_{2n}^{(\alpha,\beta)} + x a_{3n}^{(\alpha,\beta)} \right] P_n^{(\alpha,\beta)} - a_{4n}^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0 \quad (3.17)$$

$$a_{1n}^{(\alpha,\beta)} = 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) \quad (3.18)$$

$$a_{2n}^{(\alpha,\beta)} = (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2 - \beta^2) \quad (3.19)$$

$$a_{3n}^{(\alpha,\beta)} = (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2) \quad (3.20)$$

$$a_{4n}^{(\alpha,\beta)} = 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) \quad (3.21)$$

(3.20) eşitliğini kullanılarak aşağıdaki bağıntı bulunabilir.

$$a_{i,n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)} = a_{in}^{(\alpha,\beta)} \quad i=1,2,3,4 \quad (3.22)$$

(3.22) eşitliğini (3.2) ifadesinde kullanarak $Q_{nj}^{(\alpha,\beta)}(x)$ için bir öz yineleme bağıntı belirlenmiştir

$$a_{1j}^{(\alpha,\beta)} Q_{j+1,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = -a_{4n}^{(\alpha,\beta)} Q_{j-1,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = a_{4n}^{(\alpha,\beta)} Q_{j,j-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (3.23)$$

(3.23) eşitliğini kullanmaya devam ederek $Q_{j+1,j}^{(\alpha,\beta)}(x)$ için formüller bulunmuştur. $\kappa = -1, 0, 1$ için bu formüller ortak olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_{j+1,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\Gamma(j+1+\alpha)\Gamma(j+1+\beta)}{\Gamma(j+\alpha+\beta+2)(j+1)!} \frac{2j+\alpha+\beta+2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.24)$$

3.3. W_i^n Ağırlıkları

(3.2) eşitliğinde $x = t_i$ kabul edersek $P_n^{(\alpha,\beta)}(t_i) = 0$ olacağından dolayı,

$$Q_{n,j}^{(\alpha,\beta)}(t_i) = P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(t_i) P_j^{(\alpha,\beta)}(t_i) \quad (3.25)$$

eşitliği elde edilecektir

Buradan aşağıda verilen bağıntı bulunacaktır.

$$P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(t_i) = \frac{Q_{n,j}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_j^{(\alpha,\beta)}(t_i)} \quad (3.26)$$

$j = n-1$ kabul edersek (3.26) eşitliğinden

$$P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(t_i) = \frac{Q_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)} \quad (3.27)$$

bulduğumuz bu ifadeyi (3.14) eşitliğinde yerine yazalım.

$$W_i^n = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\pi} \frac{Q_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i) P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \quad (3.28)$$

(3.24) eşitliğinde $j = n-1$ kabul edip elde ettiğimiz

$$Q_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{2n+\alpha+\beta}{n! \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.29)$$

eşitliğini de W_i^n in ifadesinde yerine yazalım.

$$W_i^n = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \frac{Q_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i) P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \quad (3.30)$$

$$W_i^n = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi \cdot P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i) P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \frac{-\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{2n+\alpha+\beta}{n! \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.31)$$

Böylece;

$$W_i^n = \frac{2^{-\kappa}}{\pi} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{2n+\alpha+\beta}{n! P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t_i) P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \quad (3.32)$$

(3.26) eşitliğinde $j = n+1$ kabul edersek ifade aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$Q_{n,n+1}^{(-\alpha,-\beta)}(t_i) = P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(t_i) P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i) \quad (3.33)$$

Buradan da

$$P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(t_i) = \frac{Q_{n,n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)} \quad (3.34)$$

eşitliğini elde etmek mümkündür.

Bulduğumuz bu ifadeyi (3.14) denkleminde yerine yazarsak

$$W_i^n = -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \frac{1}{P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \frac{Q_{n,n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)}{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)} \quad (3.35)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.34) ifadesinde j yerine n yazarsak

$$W_i^n = \frac{-2^{-\kappa}}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \frac{-\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)(n+1)!} \frac{2n+\alpha+\beta+2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.36)$$

sonucuna ulaşırız. Buradan da

$$W_i^n = \frac{-2^{-\kappa}}{\pi} \frac{-\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)(n+1)!} \frac{2n+\alpha+\beta+2}{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t_i)P_n^{(\alpha,\beta)'}(t_i)} \quad (3.37)$$

eşitliği elde edilecektir.

4. KARAKTERİSTİK DENKLEM VE ÇÖZÜMÜ

4.1. Karakteristik Denklem

Bir Cauchy çekirdekli tam singüler integral denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad i^2 = -1 \quad (4.1)$$

şeklinindedir. Burada integral Cauchy esas değer anlamında düşünülmektedir. L integrand eğrisi kapalı veya kapalı olamayabilir. t ve τ , L eğrisi üzerindeki noktaların kompleks koordinatlarıdır. Burada L üzerinde verilen $a(t)$, $f(t)$ ve $M(t, \tau)$ fonksiyonlarının ve bilinmeyen $\varphi(t)$ fonksiyonunun Hölder koşulunu sağladığı kabul edilmektedir. Ayrıca $M(t, \tau)$ fonksiyonun da bu koşulu her iki değişkenine göre sağladığı varsayılmaktadır.

$M(t, \tau)$ fonksiyonunu

$$\frac{M(t, \tau)}{\tau - t} = \frac{M(t, \tau) - M(t, t)}{\tau - t} + \frac{M(t, t)}{\tau - t} \quad (4.2)$$

şeklinde düzenleyip ve

$$M(t, t) = b(t), \quad \frac{1}{\pi i} \frac{M(t, \tau) - M(t, t)}{\tau - t} = K(t, \tau) \quad (4.3)$$

notasyonunu kullanarak (4.1) denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (4.4)$$

(4.3) formülleri gereği $b(t)$ fonksiyonu L eğrisi üzerinde Hölder koşulunu sağlamaktadır. $K(t, \tau)$ fonksiyonu L eğrisinin $t = \tau$ noktası hariç her noktasında Hölder koşulunu sağlamaktadır. Yani

$$|K(t, \tau)| < \frac{A}{|\tau - t|^\lambda}, \quad A = sbt < \infty, \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (4.5)$$

Sağlanacak şekilde sonlu A sabiti ve $0 \leq \lambda < 1$ özellikli λ Hölder üssü mevcuttur.

Literatürde (4.4) denklemini bir Cauchy çekirdekli tam singüler integral denklem olarak bilinmektedir. $a(t)$ ve $b(t)$ fonksiyonları (5.4) denkleminin katsayıları, $\frac{1}{\tau - t}$ Cauchy çekirdeği ve $f(t)$ bilinen fonksiyonu denklemin sağ tarafı olarak adlandırılır. $K(t, \tau)$ çekirdeği bir Fredholm çekirdeği olmaktadır.

(4.1) ve (4.4) denklemlerinin sol tarafındaki ifadeyi $K[\varphi(t)]$ ile gösterirsek o halde bu denklemler

$$K[\varphi(t)] = f(t) \quad (4.6)$$

şeklinde gösterilebilir. Buradaki K operatörü singüler operatör olarak adlandırılır.

$$K^0[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (4.7)$$

denklemini (4.4) tam singüler integral denklemine karşılık gelen karakteristik denklem olarak adlandırılır ve K^0 ise karakteristik operatör olarak adlandırılmaktadır. Denklemin regüler kısmı için

$$K_r[\varphi(t)] \equiv \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

notasyonunu verebiliriz. Burada K regüler (Fredholm) operatör olarak adlandırılır. Böylece (4.6) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$K[\varphi(t)] \equiv K^0[\varphi(t)] + K_r[\varphi(t)] = f(t) .$$

4.2. Karakteristik Denklemin Çözümü

$$K_\varphi^0 \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t) \quad (4.9)$$

şeklinde karakteristik denklem verilmiş olsun. Bu denklemin çözümü Vekua tarafından [27] ilk defa verilmiştir.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt \quad (4.10)$$

parçalı analitik fonksiyonunu ele alalım.

Sokhotskiy-Plemelj formülü gereği

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) \quad (4.11)$$

eşitlikleri doğrudur. (4.11) denklemini (4.9) denkleminde yerine yazarsak

$$[a(t) + b(t)] \Phi^+(t) - [a(t) - b(t)] \Phi^-(t) = f(t) \quad (4.12)$$

elde edilecektir. Dolayısıyla $\Phi(z)$ fonksiyonu L eğrisi üzerinde (4.12)

denkleminin $\Phi(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan çözümü olacaktır.

Tersine $\Phi(\infty) = 0$ koşuluna uyan parçalı analitik $\Phi(z)$ fonksiyonu (4.12) denkleminin çözümü olsun. O halde, eğri boyu sıçraması $\varphi(t)$ 'ye eşit olan parçalı analitik fonksiyonun belirlenmesi gereği $\Phi(z)$ fonksiyonu (4.10) ile temsil edilecek olup (4.11) denklemindeki

2. eşitliği sağlamış olacaktır. Bu ise $\varphi(t)$ nin (4.9) denkleminin çözümü olduğunu gösterecektir.

(4.12) sınır değer problemi aşağıdaki şekilde çözülebilecektir.

(4.12) denklemini

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \quad (4.13)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \quad (4.14)$$

kabul edildi. (4.9) denkleminin κ indisi (4.13) denkleminin de indisi olmaktadır. (4.13) problemine karşılık gelen kanonik fonksiyon $X(z)$ olsun. O halde (4.13) probleminin $\Phi(\infty) = 0$ koşuluna uyan çözümü $\kappa \geq 0$ durumunda

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{[a(t) + b(t)] X^+(t)(t - z)} + X(z) Q_{\kappa-1}(z) \quad (4.15)$$

ile verilmektedir. [1]

Burada $Q_{\kappa-1}(z)$, derecesi $\kappa - 1$ i aşmayan keyfi bir polinomdur. Ayrıca $\kappa = 0$ iken $Q_{\kappa-1}(z) = 0$ dır. $\kappa < 0$ iken yalnızca

$$\int_L \frac{t^k f(t) dt}{[a(t) + b(t)] X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\kappa - 1 \quad (4.16)$$

koşulları sağlandığında (4.13) probleminin çözümü mevcut olacaktır. Eğer (4.16) koşulları da sağlanıyor ise söz konusu tek çözüm $Q_{\kappa-1}(z) \equiv 0$ olmak üzere (4.15) ile verilmektedir.

(4.9) integral denklemini çözümü (4.11) formülleri ile bulunacaktır. Bu formüllerden

$$\varphi(t) = \frac{X^+(t) + X^-(t)}{2[a(t) + b(t)]X^+(t)} f(t) + \frac{X^+(t) - X^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{[a(\tau) + b(\tau)]X^+(\tau)(\tau - t)} \quad (4.17)$$

$$+ [X^+(t) - X^-(t)]Q_{\kappa-1}(t)$$

elde edilecektir. [1] kaynağında

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \quad (4.18)$$

olduğu hatırlatılarak, (4.17) çözümünün

$$\varphi(t) = K^* f + B^*(t)z(t)P_{\kappa-1}(t) \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabileceği kanısına varılmıştır.

Burada,

$$K^* f = A^*(t)f(t) - \frac{B^*(t)z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{z(\tau)(\tau - t)} \quad (4.20)$$

$$z(t) = [A(t) + B(t)]X^+(t) = [A(t) - B(t)]X^-(t) \quad (4.21)$$

$$A^*(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \quad , \quad B^*(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \quad (4.22)$$

notasyonları kullanıldı. $P_{\kappa-1}(t)$ ise derecesi $\kappa-1$ den büyük olmayan herhangi polinomdur.

(4.19) formülü $\kappa \geq 0$ iken (4.9) denkleminin genel çözümünü vermektedir. $\kappa < 0$ iken (4.9) denkleminin çözümü (4.19) formülünden $P_{\kappa-1}(t) = 0$ kabul edilerek elde edilmektedir. Fakat bu durumda $f(t)$ için (4.16) koşulları sağlanmış olmalıdır. Bu koşullar (4.21) de dikkate alınacak olur ise

$$\int_L \frac{t^k f(t)dt}{z(t)} = 0 \quad , \quad \kappa = 0, 1, \dots, -\kappa - 1 \quad (4.23)$$

elde edilir.

Eğer $f(t) = 0$ ise, yani homojen karakteristik integral denklem söz konusu ise, bir önceki sonuçlar gösteriyor ki, $\kappa \leq 0$ iken homojen denklemin sıfırdan farklı çözümü yoktur.

$\kappa > 0$ iken bu denklem tam olarak κ sayıda lineer bağımsız çözümlere sahiptir, bunların topluluğu

$$\varphi(t) = B^*(t) z(t) P_{\kappa-1}(t) \quad (4.24)$$

ile veriliyor. Burada $P_{\kappa-1}(t)$ derecesi $\kappa-1$ den büyük olmayan keyfi bir polinomdur. $z(t)$ fonksiyonunu (4.9) denkleminin karşılık gelen kanonik fonksiyon olarak adlandıracağız.

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş oldu.

1. Eğer $\kappa > 0$ ise, $K^0 \varphi = 0$ homojen denklemi tam olarak κ sayıda lineer bağımsız çözümlere sahiptir.
2. Eğer $\kappa \leq 0$ ise, $K^0 \varphi = 0$ homojen denkleminin sıfırdan farklı çözümü yoktur.
3. Eğer $\kappa \geq 0$ ise, $K^0 \varphi = f$ homojen olmayan denklemi her f için çözülebilir.
4. Eğer $\kappa < 0$ ise, $K^0 \varphi = f$ homojen olmayan denklemi yalnız ve yalnız f fonksiyonu $-\kappa$ sayıda

$$\int_L f \psi_k dt = 0 \quad k = 0, 1, \dots, -\kappa - 1 \quad (4.25)$$

koşulunu sağlıyor ise çözülebilir. Burada ψ_k bulunmuş lineer bağımsız fonksiyonlardır.

(4.23) koşulları sağlandığında $K^0 \varphi = f$ denklemi yalnız ve yalnız bir çözüme sahiptir.

$\kappa > 0$ durumunda homojen denklemin çözümlerinin tümü (4.24) ile verilir; $\kappa \geq 0$ durumunda homojen olmayan denklemin genel çözümü (4.19) ile verilir; $\kappa < 0$ durumunda homojen olmayan denklemin çözülebilirlik koşulu (4.23) ile verilir. Çözümün kendisi ise $P_{\kappa-1}(t) = 0$ olmak üzere (4.19) ile verilir.

5. CARLEMAN-VEKUA REGÜLERLEŞTİRME YÖNTEMİ

Bu yöntemi T. Carleman [28] bir özel durum için vermiş, daha sonra ise I.N. Vekua tarafından [1] geliştirilmiştir.

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{\lambda}{\pi i} \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(\tau) \quad (5.1)$$

şeklinde singüler integral denklemini ele alalım. Bu denklemi

$$K\varphi = K^0\varphi + k\varphi = f \quad (5.2)$$

şeklinde yazmak mümkündür, burada

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \quad (5.3)$$

$$k\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau \quad (5.4)$$

$$k(t,\tau) = \frac{k^*(t,\tau)}{|\tau-t|^\lambda}, \quad 0 \leq \lambda(sbt) < 1 \quad (5.5)$$

$k^*(t,\tau)$ fonksiyonu L üzerinde Hölder koşulunu sağlamaktadır. (5.2) yi

$$K^0\varphi = f - \lambda k\varphi \quad (5.6)$$

şeklinde yazalım. Sağ tarafı bilinen kabul ederek (5.6) yı karakteristik denklem olarak çözelim.

$\kappa < 0$ iken bahsi geçen çözülebilirlik koşullarını dikkate almaksızın karakteristik denklemin çözümü bir önceki kısmın sonuçları gereği aşağıdaki gibi bulunabilir. [1,29]

$$\varphi(t) = K^* f - \lambda K^* k\varphi + B^*(t)z(t)P_{\kappa-1}(t) \quad (5.7)$$

(5.7) denklemini

$$\varphi(t) + \lambda K^* k\varphi = K^* f + B^*(t)z(t)P_{\kappa-1}(t) \quad (5.8)$$

şeklinde düzenleyelim. Burada

$$K^* f \equiv A^*(t) f(t) - \frac{B^*(t) z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{z(\tau)(\tau - t)} \quad (5.9)$$

$z(t)$, $A^*(t)$, $B^*(t)$ ler bir önceki kısımdaki (4.21) ve (4.22) ile belirlenmektedir. $P_{\kappa-1}(t)$ ise derecesi $\kappa-1$ den büyük olmayan keyfî bir polinomdur. ($\kappa \leq 0$ iken $P_{\kappa-1}(t) = 0$ dır). [1,29] kaynağında K^*k operatörünün aşağıdaki şekilde 1.çeşit bir Fredholm tür operatör olduğu gösterilmiştir.

$$K^*k\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L N(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

$$N(t, \tau) = K^*k(t, \tau) \quad (5.11)$$

(5.11) yerine

$$N(t, \tau) \equiv A^*(t) k(t, \tau) - \frac{B^*(t) z(t)}{\pi i} \int_L \frac{k(s, \tau) ds}{z(s)(s - t)} \quad (5.12)$$

ifadesi de yazılabilir.

$\kappa \geq 0$ ise bir önceki kısmın sonuçları gereği (5.8) denklemi (5.1) denkleminde denktir, eğer $\kappa < 0$ ise (5.8) denkleminde

$$\int_L \frac{t^k k \varphi(t) dt}{z(t)} = \int_L \frac{t^k f(t) dt}{z(t)}, \quad k = 0, 1, \dots, -\kappa - 1 \quad (5.13)$$

koşullarını eklemek gerekmektedir, bir başka deyişle $\kappa < 0$ durumunda da (5.1) denklemi (5.8) denklemiyle beraber (5.13) koşullarının bütününe denktir.

(5.8) denklemi bir Fredholm tür denklemdir. Böylece (5.1) denklemi regulerleştirilmiştir.

6. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde,

$$a \phi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(t) \frac{dt}{t-x} + \lambda \int_{-1}^1 K(x,t) \phi(t) dt = g(x) \quad (6.1)$$

$$\phi(x) = f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (6.2)$$

şeklindeki sabit katsayılı singüler integral denklemin çözümü incelenecektir.

Çözüm κ nın alacağı farklı 3 değere göre incelenecektir.

1) $\kappa=1$ durumu;

Bu durumda $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ olacaktır ve (7.1) denklemi aşağıdaki koşulla birlikte ele alınacaktır

$$\int_{-1}^1 \phi(t) dt = c \quad (6.3)$$

Bu koşul elde edilebilecek lineer denklem sisteminde denklem sayısının bilinmeyen sayısına eşit olması için gereklidir.

(6.1) denklemini

$$b \left[\frac{a}{b} \phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(t) \frac{dt}{t-x} \right] + \lambda \int_{-1}^1 K(x,t) \phi(t) dt = g(x) \quad (6.4)$$

şeklinde yazıp (3.8) eşitliğini dikkate alırsak (6.1) denklemini aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

$$b S(x) + \lambda \int_{-1}^1 K(x,t) \phi(t) dt = g(x). \quad (6.5)$$

Sol taraftaki integrale Gauss Jacobi integrasyon formülünü uygulayıp (3.9) eşitliğini de dikkate alarak,

$$bS(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \pi W_i^n \tilde{f}(t_i) K(x, t_i) = g(x) \quad (6.6)$$

ifadesini elde ederiz. Burada t_i ler $P_n^{(\alpha, \beta)}(t_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$ denklemini sağlamaktadır.

Şimdi de x_k lar $P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) = 0$ olmak üzere (4.6) eşitliğinde x yerine x_k yazarsak

$$bS(x_k) + \lambda \sum_{i=1}^n \pi W_i^n \tilde{f}(t_i) K(x_k, t_i) = g(x_k) \quad k=1, 2, \dots, n-1 \quad (6.7)$$

sistemini elde ederiz.

(3.15) ifadesini de dikkate alırsak

$$\sum_{i=1}^n W_i^n \tilde{f}(t_i) \left[\frac{b}{t_i - x_k} + \lambda \pi K(x_k, t_i) \right] = g(x_k) \quad k=1, 2, \dots, n-1 \quad (6.8)$$

elde ederiz.

(6.3) eşitliğine n nokta Gauss-Jacobi Kuadratur formülünü uygularsak

$$\sum_{i=1}^n W_i^n \tilde{f}(t_i) = c \quad (6.9)$$

elde edilecektir. Böylece (6.3) ek koşulunun önemi ortaya çıkmış oldu. Aslında (6.8) ve (6.9) denklemler sistemi, bilinmeyenleri $\tilde{f}(t_1), \tilde{f}(t_2), \dots, \tilde{f}(t_n)$ olan ve n tane denklemden oluşan lineer denklem sistemi olup matris şeklinde ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$(\mathbf{A}_n + \mathbf{C}_n)\mathbf{f}_n^* = \mathbf{g}_n$$

$$(\mathbf{A}_n)_{k,i} = \frac{bW_i^n}{t_i - x_k}, \quad (\mathbf{A}_n)_{n,i} = W_i^n, \quad k=1,2,\dots,n-1, \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$(\mathbf{C}_n)_{k,i} = \lambda \pi W_i^n K(x_k, t_i), \quad (\mathbf{C}_n)_{n,i} = 0, \quad k=1,2,\dots,n-1, \quad i=1,2,\dots,n,$$

$$\mathbf{f}_n^* = [\tilde{f}(t_1), \tilde{f}(t_2), \dots, \tilde{f}(t_n)] \quad , \quad \mathbf{g}_n = [\tilde{g}(t_1), \tilde{g}(t_2), \dots, \tilde{g}(t_n)]$$

(6.10)

Burada t_i ler ve x_k lar

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6.11)$$

$$P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) = 0 \quad k=1, 2, \dots, n-1 \quad (6.12)$$

sağlanacak şekilde seçilir.

2) $\kappa = 0$ durumu;

Bu durumda $\alpha = -\beta$ olacaktır. (6.6) denkleminde $x = x_k \quad k=1, 2, \dots, n$. kabul edersek sonuçta aşağıdaki denklem sistemine ulaşılacaktır.

$$\sum_{i=1}^n W_i^n \tilde{f}(t_i) \left[\frac{b}{t_i - x_k} + \lambda \pi K(x_k, t_i) \right] = g(x_k) \quad k=1, 2, \dots, n \quad (6.13)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6.14)$$

$$P_n^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) = 0 \quad k=1, 2, \dots, n \quad (6.15)$$

Matris notasyonunu kullanırsak

$$(\mathbf{A}_n + \mathbf{C}_n)\mathbf{f}_n^* = \mathbf{g}_n$$

$$(\mathbf{A}_n)_{k,i} = \frac{bW_i^n}{t_i - x_k} \quad , \quad (\mathbf{A}_n)_{n,i} = W_i^n \quad , \quad k=1,2\dots n, \quad i=1,2\dots n,$$

$$(\mathbf{C}_n)_{k,i} = \lambda \pi W_i^n K(x_k, t_i) \quad , \quad (\mathbf{C}_n)_{n,i} = 0 \quad , \quad k=1,2\dots n, \quad i=1,2\dots n,$$

$$\mathbf{f}_n^* = [\tilde{f}(t_1), \tilde{f}(t_2) \dots \tilde{f}(t_n)] \quad , \quad \mathbf{g}_n = [\tilde{g}(t_1), \tilde{g}(t_2) \dots \tilde{g}(t_n)]$$

(6.16)

3) $\kappa = -1$ durumu;

Bu durumda $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olacaktır. Negatif indis durumunda $-\kappa = 1$ sayıda uyumluluk koşulu sağlandığı taktirde (6.1) singüler integral denkleminin tek çözümünün varlığından bahsedilebilir. Dolayısıyla incelenen durumda aşağıdaki uyumluluk koşulu sağlanmalıdır.

$$\int_{-1}^1 \frac{S(x)}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} dx = 0 \quad (6.17)$$

$S(x)$ ifadesi (3.8) eşitliği ile verilmektedir.

Denklem (6.17) nın sol tarafını hesaplayalım ve bunun için (3.11) ifadesini kullanalım.

$$\int_{-1}^1 \frac{S(x)}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} dx = \int_{-1}^1 \frac{-2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{j=0}^p B_j P_{j-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} dx \quad (6.18)$$

$$= -2^{-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sum_{j=0}^p B_j \int_{-1}^1 P_{j+1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} dx \quad (6.19)$$

son ifadenin değeri sıfırdır. Yine $\kappa = -1$ durumuna benzer şekilde;

$$\sum_{i=1}^n W_i^n \cdot \tilde{f}(t_i) \cdot \left[\frac{b}{t_i - x_k} + \pi \cdot K(x_k, t_i) \right] = g(x_k) \quad (6.20)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.21)$$

$$P_{n+1}^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n+1 \quad (6.22)$$

Bu durumda bir denklem daha eklenmeli, bu da ek yeni bir sıralama x_{n+1} noktası seçmek ile mümkündür.

7. NYSTRÖM İNTERPOLASYON FORMÜLÜ

$\kappa=1$ durumunu ele alalım.

Carleman-Vekua regularizasyon yöntemi yardımıyla (6.1) ve (6.3) denklemleri aşağıda verilen Fredholm Tip İntegral Denklemine dönüştürülebilir.

$$y(x) + \lambda \int_{-1}^1 W(t) L(x, t) y(t) dt = F(x) \quad (7.1)$$

$$L(x, t) = -\frac{1}{(a^2 + b^2)} \left[a \frac{K(x, t)}{W(x)} - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{K(s, t)}{W(s)(s-x)} ds \right] \quad (7.2)$$

$$F(x) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[a \frac{f(x)}{W(x)} - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(s) ds}{W(s)(s-x)} \right] + \frac{|b|c\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7.3)$$

Eğer $K(s, x) \in C'([-1, 1] \times [-1, 1])$ ve $f(s) \in C'[-1, 1]$ ise o halde

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{W(x)} - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{W(s)(s-x)} \right] = -\frac{2 \sin \alpha \pi}{b} P_1^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (7.4)$$

ve

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (7.5)$$

özdeşliklerini kullanarak (6.2) ve (6.3) eşitliklerini daha kompakt şekilde aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$L(x,t) = -\frac{2 \sin \alpha \pi}{b} K(x,t) P_1^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{b}{(a^2 + b^2)\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t,x,s)}{W(s)} ds \quad (7.6)$$

$$F(x) = -\frac{2 \sin \alpha \pi}{b} f(x) P_1^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{b}{(a^2 + b^2)\pi} \int_{-1}^1 \frac{h(x,s)}{W(s)} ds + \frac{|b|c \pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7.7)$$

Burada

$$g(t,x,s) = \begin{cases} \frac{K(s,t) - K(x,t)}{(s-x)}, & \text{eğer } s \neq x \text{ ise} \\ \frac{\partial K(s,t)}{\partial s}, & \text{eğer } s = x \text{ ise} \end{cases} \quad (7.8)$$

$$h(x,s) = \begin{cases} \frac{f(s) - f(x)}{(s-x)}, & \text{eğer } s \neq x \text{ ise} \\ f(s), & \text{eğer } s = x \text{ ise} \end{cases} \quad (7.9)$$

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(2\alpha + 1 + x) \quad (7.10)$$

(7.8) ve (7.9) eşitliklerinden görüldüğü üzere $g(t,x,s)$ ve $h(x,s)$ fonksiyonları birer sürekli fonksiyonlardır. Buradan da $L(x,t)$ ve $F(x)$ lerin sürekliliği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla Nyström teorisi (7.1) denkleminde uygulanabilir.

Şimdi de (7.1) deki integrale Gauss-Jacobi Kuadratür formülünü uygulayalım.

$$\int_{-1}^1 W(t) L(x,t) y(t) dt = \sum_{k=1}^n W_k L(x,t_k) y(t_k) + \rho(x) \quad (7.11)$$

Burada t_k lar $P_n^{(\alpha,\beta)}(t_k)$ Jacobi polinomlarının birer sıfırlarıdır ve $k=1,2,\dots,n$ dir.

W_k lar ağırlıklar, $\rho(x)$ ise kalan terimdir. $\forall x \in [-1,1]$ için $\rho(x)$ kalan teriminin alabileceği azami değer σ olsun.

Dolayısıyla

$$|\rho(x)| \leq \sigma, \quad |\rho_i| = |\rho(x_i)| \leq \sigma \quad (7.12)$$

olmaktadır.

(7.11) denklemini kullanarak (7.1) denklemini şu şekillerde ifade edebiliriz.

$$y(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n-1} W_k L(x, t_k) y(t_k) + \lambda \rho(x) = F(x) \quad (7.13)$$

veya

$$y(x) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k L(x, t_k) y(t_k) = F(x) - \lambda \rho(x) \quad (7.14)$$

$L(x, t)$ ifadesini yaklaşık olarak hesaplayabilmek için $(n-1)$ nokta Gauss-Jacobi Kuadratür formülünü uygulayacağız.

$$L(x, t) = L_n(x, t) + \rho_n(K; x, t) \quad (7.15)$$

$$F(x) = F_n(x) + \rho_n(f; x) \quad (7.16)$$

veya

$$L_n(x, t) = -\frac{b}{a^2 + b^2} \sum_{m=1}^{n-1} W_m^* g(t, x, s_m) - \frac{2 \sin \alpha \pi}{b} K(x, t) P_1^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (7.17)$$

$$F_n(x) = -\frac{b}{a^2 + b^2} \sum_{m=1}^{n-1} W_m^* h(x, s_m) - \frac{2 \sin \alpha \pi}{b} f(x) P_1^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{|b| c \pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7.18)$$

$$\rho_n(k; x, t) = -\frac{b}{(a^2 + b^2)\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{W(s)} g(t, x, s) ds - \sum_{r=1}^{n-1} W_r^* g(t, x, s_r) \right] \quad (7.19)$$

$$\rho_n(f; x) = -\frac{b}{(a^2 + b^2)\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{W(s)} h(x, s) ds - \sum_{r=1}^{n-1} W_r^* h(x, s_r) \right] \quad (7.20)$$

Burada s_r ler $P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_r) = 0$, $r = 1, 2, \dots, n-1$ özellikli apsisler, W_r^* ise ağırlıklar olup $-\alpha$ ve $-\beta$ ya karşılık gelmektedirler. Bir başka ifade ile W_r^* ağırlıkları $\omega^* = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta}$ yoğunluğuna ve $\{P_i^{(-\alpha, -\beta)}(x)\}_{i=1}^{n-1}$ Jacobi polinomlar ailesine göre türetilen $(n-1)$ nokta Gauss Jacobi kuadratrür formülündeki ağırlıklardır. $\rho_n(K; x, t)$ ve $\rho_n(f; x)$ kalan terimler olup yeterince küçüktürler.

(7.15) ve (7.16) ifadelerini (7.14) eşitliğinde yerine yazarsak

$$y(x) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k [L(x, t_k) + \rho_n(K, x, t_k)] y(t_k) = F_n(x) + \rho_n(f; x) - \lambda \rho(x) \quad (7.21)$$

veya

$$y(x) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k L(x, t_k) y(t_k) = F_n(x) + \left[\rho_n(f; x) - \lambda \rho(x) - \lambda \sum_{k=1}^n W_k \rho_n(K; x, t_k) y(t_k) \right] \quad (7.22)$$

Köşeli parantez içerisindeki ifade $\rho_n(f; x)$, $\rho(x)$ ve $\rho_n(K; x, t_k)$ şeklindeki kalan terimleri içermekte olup sonuçta bu ifadenin de bir sonsuz küçük olduğu açıktır.

$$r(x) = -\lambda \rho(x) - \lambda \sum_{k=1}^n W_k \rho_n(K; x, t_k) y(t_k) - \rho_n(f; x) \quad (7.23)$$

kabul edelim. Genelliği bozmadan σ önceden verilen yeteri kadar küçük seçilmiş sayı olmak üzere

$$|r(x)| \leq \sigma \quad |r_i| = |r(x_i)| \leq \sigma \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.24)$$

kullanarak

(7.23) eşitliğini kullanarak (7.22) ifadesini

$$y(x) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k L(x, t_k) y(t_k) = F_n(x) + r(x) \quad (7.25)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

(7.25) eşitliğinde kullanılan $r(x)$ sonsuz küçüğünü ihmal edersek

$$z(x) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k L_n(x, t_k) z(t_k) = F_n(x) \quad (7.26)$$

elde ederiz.

$x = t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ kabul edersek (7.26) ifadesi aşağıdaki şekle dönüşecektir.

$$z(t_i) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k L_n(t_i, t_k) z(t_k) = F_n(t_i) \quad (7.27)$$

Denklem sistemini matris biçiminde yazalım.

$$(I + \lambda \tilde{Q}_n) z_n = F_n \quad (7.28)$$

$$(Q_n)_{i,k} = W_j L_n(t_i, t_k) \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad [29] \quad (7.29)$$

Burada

$z_n = [z_n(t_1), z_n(t_2), \dots, z_n(t_n)]^T$, $F_n = [F_n(t_1), F_n(t_2), \dots, F_n(t_n)]^T$ dir. Srivastav, [30] çalışmasında (6.16) denkleminde verilen A_n matrisinin tersini hesaplamış ve

$$\mathbf{A}_n^{-1} = (b_{i,j}) = \frac{b}{a^2 + b^2} \frac{W_j^*}{t_i - s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7.30)$$

$$b_{i,n} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olduğunu göstermiştir.

Böylece $\kappa=1$ durumunda (6.8) ve (6.9) sistemi ile (7.29) sistemi birbirine denkliği anlaşılmakta olup

$$\tilde{Q}_n = A_n^{-1} C_n ; \quad F_n = A^{-1} f \quad (7.31)$$

olduğu ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla $z_n = y_n^*$ olmaktadır.

(7.28) eşitliğini çözerek $y(x_1), y(x_2) \dots y(x_n)$ değerlerine karşılık gelen $z(x_1), z(x_2) \dots z(x_n)$ yaklaşık değerler bulunabilir. Bu değerler interpolate edilerek $y(x)$ bilinmeyeninin $x \neq x_i, i = 1, 2, \dots, n$ apsisine karşılık gelen yaklaşık değeri de bulunabilir. İncelediğimiz halde interpolasyon polinomu türetmek yerine (7.25) i kullanarak

$$z(x) = F_n(x) - \lambda \sum_{k=1}^n W_k L_n(x, t_k) z(t_k) \quad (7.32)$$

fonksiyonunu elde eder ve $y(x)$ e karşılık gelen interpolasyon polinomu olarak düşünebiliriz.

(7.1) deki integral yerine Gauss-Jacobi Kuadratur formülü yardımıyla yazılan sonlu toplam durumunda ortaya çıkacak hata miktarları ne kadar küçük elde edilebilir ise, bu durumda $|y(x) - z(x)|$ farkı da bir o kadar küçük olacaktır. Bu durumun n sayısını yeteri kadar büyük seçmekle gerçekleştirebileceği aşıkardır.

$|y(t_i) - z(t_i)|$ ifadesinin yeteri kadar küçük edinilebilir olduğunu gösterelim. $y(t_i)$ lerin sağlanması gereken lineer denklem sistemi (7.25) te $x = t_i, i = 1, 2, \dots, n$ kabul edilerek

$$y(t_i) + \lambda \sum_{k=1}^n W_k L(t_i, t_k) y(t_k) = F_n(t_i) + \Gamma(t_i) = F_n(t_i) + r_i \quad (7.33)$$

şeklinde türetilabilmektedir.

(7.27) ve (7.33) denklemler sisteminin katsayılar matrisi aynı olup

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 + \lambda W_1 L_n(t_1, t_1) & \lambda W_2 L_n(t_1, t_2) & \cdots & \lambda W_n L_n(t_1, t_n) \\ \lambda W_1 L_n(t_2, t_1) & 1 + \lambda W_2 L_n(t_2, t_2) & \cdots & \lambda W_n L_n(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda W_1 L_n(t_n, t_1) & \lambda W_2 L_n(t_n, t_2) & \cdots & 1 + \lambda W_n L_n(t_n, t_n) \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

şeklindedir.

Bu matrisin determinanı $\Delta(\lambda)$ olsun. $\Delta(\lambda) \neq 0$ kabul edelim. λ sayısı (7.27), (7.33) ve (7.1) in bir regüler sayısı olduğunu varsayalım. A_n matrisinde $(a_n)_{ij}$ teriminin kofaktörü $\Delta_{i,k}$ olsun. O halde (7.27) ve (7.33) denklemler sisteminin çözümleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir.

$$z(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{i,k} F_n(t_k)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.35)$$

$$y(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{i,k} [F_n(t_k) + \rho(t_i)]}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.36)$$

(7.35) ve (7.36) Crammer kuralı veya determinantlar yöntemi yardımıyla bulundu.

(7.35) ve (7.36) denklemlerinden

$$|y(t_i) - z(t_i)| = |\rho_i| \left| \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{i,k}}{\Delta(\lambda)} \right| \leq |\rho_i| \frac{\sum_{k=1}^n |\Delta_{i,k}|}{|\Delta(\lambda)|} \quad (7.37)$$

elde edilecektir. $\frac{\sum_{k=1}^n |\Delta_{i,k}|}{|\Delta(\lambda)|}$ nın üst sınırı B olsun.

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\frac{\sum_{k=1}^n |\Delta_{i,k}|}{|\Delta(\lambda)|} \leq B \quad (7.38)$$

(7.24) denklemini dikkate alarak (7.37) denkleminde

$$|y(t_i) - z(t_i)| = \sigma B \quad (7.39)$$

elde edebiliriz. σ yeteri kadar küçük pozitif sayı olarak seçildiği için sol taraftaki farkın mutlak değeri de yeteri kadar küçük olabilecektir.

(7.39) eşitliğindeki B sayısı (7.38) tanım gereği $\Delta_{i,k}$ ve $\Delta(\lambda)$ ifadelerine bağlıdır ve sonlu pozitif sayıdır. Regüler λ sayısı için bu sayılar (7.34) ten görüldüğü gibi W_i ve $L_n(t_i, t_k)$ ifadelerine bağlıdır.

W_i ler Gauss-Jacobi Kuadratur formülündeki ağırlıklar olup tamamen n sayısı ve uygun Jacobi polinomları yardımıyla belirlenmektedir. Bir başka deyişle (7.1) integral denklemindeki bilinen ve bilinmeyen fonksiyonlardan bağımsızdırlar.

$L_n(t_i, t_k)$ lar ise (7.17) den görüldüğü gibi $K(x, t)$ çekirdeğine, $(n-1)$ sayısına ve uygun Jacobi polinomlarına bağlıdır. Yani kolayca hesaplanabilir olup birer sabittirler. Dolayısıyla B sayısı sonlu bir sayı olarak bulunabilir.

(7.39) eşitliğindeki σ sayısı ise yukarıda tanımlandığı gibi azami hata miktarı olup yeteri kadar küçük seçilebilir. Başka bir deyişle (7.39)

eşitliğinin sağ tarafı bir sonsuz küçük olup $y(t_i)$ kesin değeri yerine $z(t_i)$ yaklaşık değerinin kullanılabilir olduğu aşıkardır.

Şimdi geriye $\forall x \in [-1,1] \setminus \bigcup_{k=1}^n \{t_k\}$ ifadesi için $|y(x) - z(x)|$ farkını

değerlendirmek, bir başka deyişle bu farkın sonsuz küçük olabileceğini gösteren bir eşitsizlik elde etmek kaldı.

(7.25) eşitliğinden

$$y(x) = F_n(x) - \lambda \sum_{k=1}^n W_k L(x, t_k) y(t_k) + r(x) \quad (7.40)$$

(7.40) ve (7.32) ifadelerinden

$$|y(x) - z(x)| \leq \left| \lambda \sum_{k=1}^n W_k |L_n(x, t_k)| |y(t_k) - z(t_k)| + |r(x)| \right| \quad (7.41)$$

yazılabilir. (7.24) ve (7.37) eşitliklerinden

$$|y(x) - z(x)| \leq \left| \lambda \sum_{k=1}^n W_k |L_n(x, t_k)| \sigma B + \sigma \right| \quad (7.42)$$

veya

$$|y(x) - z(x)| \leq \sigma \left[\left| \lambda B \sum_{k=1}^n W_k \sum_{k=1}^n |L_n(x, t_k)| + 1 \right| \right] \quad (7.43)$$

yazılabilir.

(7.17) tanımından ve her m için $g(t, x, s_m)$ nin tanımından görüldüğü gibi $L_n(x, t)$ fonksiyonu $[-1,1] \times [-1,1]$ de süreklidir, dolayısıyla en büyük değere sahiptir. Bir başka ifadeyle

$$\max |L_n(x, t)| = M^0 \quad -1 \leq x, t \leq 1 \quad (7.44)$$

şartını sağlayan M^0 sayısı mevcuttur.

O halde (7.43) ifadesinden

$$|y(x) - z(x)| \leq \sigma \left[1 + |\lambda| B M^0 \sum_{k=1}^n W_k \right] \quad (7.45)$$

yazılabilir. Öte yandan $\sum_{k=1}^n W_k = \bar{W} = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$ şartını

sağlayan bir $\bar{W}$ sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$|y(x) - z(x)| \leq \sigma \left[1 + |\lambda| B M^0 \bar{W} \right] \quad (7.46)$$

elde edilmiş oldu.

Unutmayalım ki (7.46) eşitsizliği her $x \in [-1, 1]$ için doğrudur.

Bu eşitsizliğin tek eksik kalan kısmı Gauss Jacobi Kuadratr formülü için yeteri kadar küçük σ sayısının (7.11) den görüldüğü gibi $y(t)$ nin türevlerini içermesidir. Çünkü bu denklemdeki $\rho(x)$ fonksiyonu Gauss Jacobi Kuadratr formülü için

$$k_{2n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)[\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)]^2} \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1} n!}{(2n)!} \quad (7.47)$$

olmak üzere

$$\rho(x) = k_{2n} T^{(2n)} \quad (7.48)$$

şeklindedir ve bizim durumda $T = L(x, t) y(t)$ dir

$$H^{(s)}, N^{(s)}, L_x^{(s)} \text{ ve } L_t^{(s)} \text{ ile sırasıyla } |y^{(s)}(x)|, |F^{(s)}(x)|, \left| \frac{d^s}{dx^s} L(x, t) \right| \text{ ve}$$

$\left| \frac{d^s}{dt^s} L(x, t) y(t) \right| = \left| y(t) \frac{d^s}{dt^s} L(x, t) + C'_s y'(t) \right|$ lerin üst sınırlarını işaretleyelim.

$T^{(2n)}$ ise $H^{(0)}, H^{(1)}, \dots, H^{(2n)}$ ile ifade edilebilir.

Leibniz kuralını kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^s}{dt^s} L(x, t) y(t) \right| &= \left| y(t) \frac{d^s}{dt^s} L(x, t) + C'_s y'(t) \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} L(x, t) + \dots + y^{(s)}(t) L(x, t) \right| \quad (7.49) \\ &\leq |y(t)| \left| \frac{d^s}{dt^s} L(x, t) \right| + C'_s |y'(t)| \left| \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} L(x, t) \right| + \dots + |y^{(s)}(t)| |L(x, t)| \\ &\leq H^{(0)} L_t^{(s)} + C'_s H^{(1)} L_t^{(s-1)} + \dots + H^{(s)} L_t^{(0)} \end{aligned}$$

olacaktır.

$$y(x) = F(x) - \lambda \int_{-1}^1 W(t) L(x, t) y(t) dt \quad (7.50)$$

integral denklemini ele alalım. (7.50) denklemini s defa türevlersek

$$y^{(s)}(x) = F^{(s)}(x) - \lambda \int_{-1}^1 W(t) \left[\frac{d^s}{dx^s} L(x, t) \right] y(t) dt \quad (7.51)$$

elde ederiz. Buradan

$$|\phi^{(s)}(x)| \leq |\lambda| \max_{-1 \leq x \leq 1} |y(s)| \int_{-1}^1 ds \max \left| \frac{d^s}{dx^s} L(x, t) \right| + \max |F^{(s)}(x)| \quad (7.52)$$

$$\leq 2 |\lambda| H^{(0)} L_x^{(s)} + N^{(s)}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuncu eşitsizlik her x için sağlanmaktadır. Özel durumda $N^{(0)}$ için sağlanmalıdır. Dolayısıyla

$$H^{(s)} \leq 2|\lambda| H^{(0)} L_x^{(s)} + N^{(s)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.53)$$

elde edilecektir.

Şimdi T^{2n} için (7.49) ve (7.53) den aşağıdaki ifadeleri yazılabilir.

$$\begin{aligned} T^{(s)} &= H^{(0)} L_y^{(s)} + C'_s H^{(1)} L_y^{(s-1)} + \dots + H^{(s)} L_y^{(0)} \leq \\ &H^{(0)} M_y^{(s)} + C'_s L_y^{(s-1)} \left[2|\lambda| H^{(0)} L_x^{(1)} + N^{(1)} \right] \\ &+ C_s^2 L_y^{(s-2)} \left[2|\lambda| H^{(0)} L_x^{(2)} + N^{(2)} \right] \\ &+ \dots + L_y^{(0)} \left[2|\lambda| H^{(0)} L_x^{(s)} + N^{(s)} \right] \equiv P_s + Q_s H^{(0)} \end{aligned} \quad (7.54)$$

Tanımından da bilindiği gibi P_s ve Q_s bilinen sabit sayılardır. Azami hata miktarı olan σ sayısı için

$$\sigma \leq k_{2n} T^{(2n)} \leq (P_{2n} + Q_{2n} H^{(0)}) \quad (7.55)$$

doğrudur.

Burada k_{2n} (7.47) ile tanımlanmıştır. (7.55) kullanılarak (7.45) eşitsizliği

$$|y(x) - z(x)| \leq k_{2n} (P_{2n} + Q_{2n} H^{(0)}) \left[1 + |\lambda| B M^{(0)} \sum_{k=1}^n W_k \right] \quad (7.56)$$

şeklinde yazabilir.

$$\max |z(x)| = S \quad (7.57)$$

olsun.

(7.35) ve (7.38) den ve $N^{(0)}$ ifadesinin tanımından

$$|z(t_i)| \leq \left| \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{i,k}}{\Delta(\lambda)} \right| |F_n(t_k)| \leq B N^{(0)} \quad (7.58)$$

yazılabilir. (7.26) dan

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq \left| F_n(x) - \lambda \sum_{k=1}^n W_k L_n(x, t_k) z(t_k) \right| \\ &\leq |F_n(x)| + |\lambda| \sum_{k=1}^n W_k |L_n(x, t_k)| |z(t_k)| \leq N^{(0)} + M^{(0)} |\lambda| \bar{W} N^{(0)} B \end{aligned} \quad (7.59)$$

elde edilecektir. (7.56) dan

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |z(x)| + k_{2n} \left[1 + |\lambda| B M^{(0)} \bar{W} \right] (P_{2n} + Q_{2n} H^{(0)}) \\ &\leq S + k_{2n} \left[1 + |\lambda| B M^{(0)} \bar{W} \right] (P_{2n} + Q_{2n} H^{(0)}) \end{aligned} \quad (7.60)$$

Sol taraf $\forall x$ için sağlanıyor ve $\max |y(x)| = H^{(0)}$ olduğu için de sağlanacağından dolayı yukarıdaki eşitsizlikten

$$|H^{(0)}| \leq S + \frac{S + \left[1 + |\lambda| B M^{(0)} \bar{W} \right] P_{2n} k_{2n}}{1 - k_{2n} \left[1 + |\lambda| B M^{(0)} \bar{W} \right] Q_{2n}} \quad (7.61)$$

elde edilecektir. Bu eşitsizlik sağ tarafın paydası pozitif ise doğru olacaktır. Bunun için k_{2n} in yeteri kadar küçük olması nedeniyle sadece $B, M^{(0)}, Q_{2n}, |\lambda|$ sayılarını çok büyük seçmemek gerekiyor. Eğer (7.53) ifadesinin sağ tarafındaki kesrin paydası pozitif ise, $y(x)$ çözümü sınırlı olacaktır. Bir başka deyişle (7.56) eşitsizliğinin sağ tarafı sonsuz küçüktür. Böylece $|y(x) - z(x)|$ için bir değerlendirme bulunmuş olacaktır. λ ların seçilmiş değerinin özdeğer olmayıp regüler bir sayı olacağı açıktır. Dolayısıyla yukarıdaki λ ile ilgili varsayım kaldırılabilir.

8. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde Gauss-Jacobi kuadratr formüllerini kullanarak, örnek olarak seçilen singüler integral denklemlerin nümerik çözümlerini vereceğiz.

Örnek 1:

$$\frac{a w(x)g(x)}{\sin(0.34\pi)} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t)g(t)}{t-x} dt = \cos x \quad (8.1)$$

şeklinde verilen integral denklemini

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w(t) g(t) dt = 1 \quad (8.2)$$

ek koşulu altında çözelim. [11]

Hesaplamalarda $\alpha = -0.34$ ve $\beta = -0.66$ kabul edeceğiz.

Yazmış olduğumuz özel program yardımıyla nümerik çözümleri bulmaya çalıştık.

(8.1) denklem sisteminin çözümünde $n=5$, $n=7$ ve $n=9$ durumları için elde edilen sonuçlar sırasıyla Tablo 1, Tablo 2, Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 1: $n=5$ için elde edilen değerler tabloda verilmiştir.

t değeri	Nümerik Çözüm
-0.968584720472833	0.400693018455194
-0.631146267215495	0.558075320194649
-0.053441213590367	1.119298221637931
0.543521766965528	1.645526725151323
0.931872656535391	1.715670192729460

Tablo 2: $n=7$ için elde edilen değerler tabloda verilmiştir.

t değeri	Nümerik Çözüm
-0.983924674961088	0.398146406402238
-0.805516017810955	0.453775473105946
-0.467687469604951	0.692069272077313
-0.037530597769521	1.136463280429681
0.399744797473108	1.552961916120183
0.757537317933168	1.720276553158599
0.965068952432547	1.707548099327457

Tablo 3: $n=9$ için elde edilen değerler tabloda verilmiştir.

t değeri	Nümerik Çözüm
-0.990263666409846	0.397221966168949
-0.880753557812293	0.423521007654742
-0.665011180630674	0.534382445625848
-0.369166517757608	0.785675300486674
-0.028910891124159	1.145744119858397
0.314714531191171	1.485121140567128
0.620264163254136	1.681717870719839
0.850889445038048	1.725623847113084
0.978825909545343	1.703482968651704

Bulunan $g(t_1), g(t_1), \dots, g(t_n)$ değerlerinin (8.2) eşitliğini sağlandığını göstermek için $n = 5, 7, 9$ durumlarında (8.2) nin sol tarafının yaklaşık değeri hesaplandı ve aşağıdaki tablo türetildi.

Tablo 4:

n değeri	Ek koşul integrali
5	0.9999999999999999
7	0.9999999999999999
9	0.9999999999999999

Görüldüğü gibi (8.2) koşulu yüksek hassasiyetiyle sağlanmaktadır.

Örnek 2:

$$w(x)g(x) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(x)g(x)}{t-x} dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{1}{3}} (1+t)^{-\frac{2}{3}} \frac{\cos t - \cos x}{t-x} dt \quad (8.3)$$

denkleminin

$$\int_{-1}^1 w(t)g(t)dt = \int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{1}{3}} (1+t)^{-\frac{2}{3}} \cos t dt \quad (8.4)$$

ek koşuluna uygun çözümünü nümerik olarak çözelim. (8 .
denkleminin (8.4) koşuluna uyan sınırlı kesin çözümü $g(x) = \cos x$ dir.
[31]

Biz $\alpha = -\frac{1}{3}$ ve $\beta = -\frac{2}{3}$ seçerek hesaplamamızı yapacağız.

Yazmış olduğumuz özel program yardımıyla nümerik çözümleri bulmaya çalıştık.

$n=5$, $n=7$, $n=9$ durumları için elde edilen sonuçlar sırasıyla Tablo 5, Tablo 6, Tablo 7 de verilmiştir.

Tablo 5: $n=5$ için elde edilen değerler tabloda verilmiştir.

t	Tam çözüm	Nümerik çözüm
-0.969278256497378	0.565894739776549	0.565890433181691
-0.632933925666885	0.806295526149614	0.806308462550549
-0.055668490110968	0.998450909716463	0.998428785742970
0.541657370306403	0.856855390018344	0.856844503108083
0.931038116783642	0.597001485183270	0.597043488637499

Tablo 6: $n=7$ için elde edilen değerler tabloda verilmiştir.

t değeri	Tam çözüm	Nümerik çözüm
-0.984280342525139	0.553462641719341	0.553462654878668
-0.806489826646684	0.692036553510464	0.692036498465481
-0.469088870426164	0.891980556155583	0.891980667326582
-0.039094564188155	0.999235904852200	0.999235830088006
0.398314884871099	0.921715900704339	0.921715942239787
0.756511672000936	0.727234779778747	0.727234920131932
0.964639867426927	0.569712885972195	0.569712601537886

Tablo 7

$n=9$ için elde edilen değerler tabloda verilmiştir.

t değeri	Tam çözüm	Nümerik çözüm
-0.990479278207356	0.548289108545486	0.548289108517175
-0.881358467404983	0.636103532965875	0.636103533108860
-0.665930735974612	0.786342125237091	0.786342124933693
-0.370294245356699	0.932220901585198	0.932220901871740
-0.030115597771803	0.999546559657591	0.999546559391882
0.313573258285384	0.951237439130914	0.951237439213072
0.619319101543068	0.814273893909936	0.814273893949226
0.850249859864405	0.659795410465418	0.659795409880717
0.978565516787304	0.558213307789528	0.558213308787771

9. SONUÇ

Bu çalışmada Cauchy singüler integral denklemlerin bir nümerik çözümü incelenmiştir. Nyström yönteminin uygulamasını inceleyebilmek için önce Jacobi polinomları ve özellikleri; daha sonra Gauss-Jacobi kuadratür formülünden bahsedilmiştir. Singüler integral denklemin indisi tanımlanarak, hesaplanması için formüller verilmiştir. Daha sonra indise bağlı olarak karakteristik denklemin çözülebilirlik durumları açıklanmış, singüler integral denklemin Carleman-Vekua yöntemiyle Fredholm denklemine dönüştürülmesi gösterilmiştir.

Nihayet sabit katsayılı singüler integral denklemin iki farklı yoldan nümerik çözümü ele alınmış, bu çözümü özel olarak seçilmiş sıralama noktalarındaki değerleri cinsinden yine denklemin indisine bağlı üç çeşit lineer denklem sistemi elde edilmiştir.

Nyström yönteminin yakınsaklık durumunu incelemek amacıyla çözüm için bir interpolasyon polinomu türetilmiş, daha sonra da bu polinomun kesin çözüme yakınsaklığını gösterebilmek amacıyla hata terimi için üst sınır elde edilmiştir. İki farklı singüler integral denklem örneği seçilerek sayısal çözümlerin performansları test edilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Muskhelishvili, N.I, 1958, Singular İntegral Equations, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen
- [2] Tricomi, F.G.,1985, Integral equations, Dover publications Inc, New York.
- [3] Popov, G.Y.,1982, Contact problems for a linearly deformable base, Vishcha Shkola, Kiev- Odessa (Russia).
- [4] Green, C.D., 1969, Integral equation methods, Thomas Nelson & Sons Ltd. London.
- [5] Atkinson, K.,1997, The numerical solution of integral of the second kind, Cambridge University Pres, University of Iowa
- [6] Golberg, M.A., 1999, Numerical solutions of integral equations, Plenum Press 430
- [7] Kumar, S. Sangal, A.L.2004, Numerical solution of singular equations using cubic spline interpolations, Indian J. Pure applied Math. 35(3) 415-421
- [8] Abdou, M.A., Nasr, A.A., 2003, On the numerical treatment of the singular integral equation of the second kind, Applied Mathematics and Computation, 146, 373-380
- [9] Krenk, S. 1975, On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kind, Quarterly of Applied Mathematics, October 1975, 225-232
- [10] Okecha, G.E. 2007, Solution of Cauchy type singular integral equations of the first kind with zeros of Jacobi polynomials as interpolation nodes, İnter. Journal of Math. And Math. Sci. Vol:2007, Article ID 10957, 12 pages
- [11] Gerasoulis, A.1984, Singular integral equations – the convergence of the gauss jacobi quadrature method, Inter national Journal of Computer, 15:1, 143-161

- [12] Chrysakis, A.C., Tsamasphyros,G., 1992, Numerical solution of integral equations with a logarithmic kernel by the method of arbitrary collocation points, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.Vol.33, 143-148
- [13] Sampathon, C., Jain, D.J. 1990, Solution of an integral with a logarithmic kernel, *International Journal Math and Math Science*, Vol.13 No.4, 763-768.
- [14] Jin, X., Keer,L.M., Wang,Q. 2008, A practical method for singular integral equaitons of the second kind, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1005-1014
- [15] Alexandrov, V.M.,1998, Asymptotic Methods in Contact Mechanics, *Math Comput. Modellind* Vol:28, No:4-8, 29-35
- [16] Alexandrov, V.M.2002, A Method of solving the integral equation of plane contact problems for semi-bounded bodies, *J.Appl.Maths Mechs*, Vol:66, No:5, 835-840
- [17] Chebakov, M.I., 2005, Asymptotic solution of contact problems for a relatively thick elastic layer when there are friction forces in the contact area, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 69, 296-304
- [18] Scalia, A. Sumbatyan, M.A.2003, On the properties of integral equations arising in contact problems for porous elastic strip, *European Journal of Mechanics A/Solids* 22 489-496
- [19] Rizk, A.A. 2006, Orthotropic semi-infinite medium with a crack under thermal shock, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 46, 217-231
- [20] Alexandrov, V.M., Sumbatyan, M.A., 2008, The contact problem for a strip cover plate interacting with an elastic half space, *Journal of Applied Mathematic and Mechanics* 72, 489-491
- [21] Coskun, Erhan. 1990, Interface problems in neutron transport by a new set of quadrature, *Texas.Univ.M. S*
- [22] Nickelson, L., Shugurov, V., 2005, Singular integral equations methods fort he analysis of microwave structures, *Brill Academic Publisher*

- [23] Gamelin, W.T.,2001, Complex Analysis, Springer science media, 473
- [24] Szegő, G., 1975, Orthogonal Polynomials, Fourt Ed., Amer. Math. Soc, Providence, R.I.
- [25] Cetin, Bayram. 2007, Ortogonal polinomlarda özel konular, Ankara Univ.M.S.
- [26] Erdogan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S.,1973, Numerical solution of singular integral equaitons, G.C. Sih, ed., Noordhoff Leyden
- [27] I.N.Vekua, 1940, Cauchy esas değer anlamında integralleri içeren Singüler integral denklemler hakkında, USSR Bilimler Akademisi Raporları, XXVI. Cilt, No 4, 335-338
- [28] T. Carleman, 1922, Sur Pa resolution de certaines equations integrals, Arkiv för, mat, astr. Och fys., Bd.16, No 26, , p.1-19
- [29] Gakhov, F. D.,1966, Boundary value problems, Pergamon Press Ltd.,581
- [30] R.P. Srivastav, 1982, On the numerical numerical solution of the singular integral equations using Gauss-Jacobi Formulae, Transactions of the 27 th Conference of army mathematicans, ARO Report 82-1,239-246
- [31] Chen, Z., Wang, C., Zhou,Y. 2009, Anew method for solving Cauchy type singular integral equations of the second kind. Inter. Jour. Of Comp. Sci. 1-12



www.seruenyayinevi.com

[/seruenyayinevi](https://www.facebook.com/seruenyayinevi)

[/seruenyayinevi](https://www.instagram.com/seruenyayinevi)

[/seruenyayinevi](https://www.twitter.com/seruenyayinevi)



9 786256 399327